НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ ФІЗИКИ

Бистрик Юрій Сергійович

УДК 531.19

АНОМАЛЬНІ ТРАНСПОРТНІ ТА РЕЛАКСАЦІЙНІ ПРОЦЕСИ У СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМАХ З НАДПОВІЛЬНОЮ ЕВОЛЮЦІЄЮ

01.04.02 — теоретична фізика

АВТОРЕФЕРАТ

**дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук**

Суми — 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Сумському державному університеті МОН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Денисов Станіслав Іванович
Сумський державний університет,
професор кафедри електроніки,
загальної та прикладної фізики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Яновський Володимир Володимирович
Інститут монокристалів НАН України,
завідувач відділу теорії конденсованого
стану речовини;

доктор фізико-математичних наук, професор
Чепурних Геннадій Кузьмич
Інститут прикладної фізики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу
моделювання радіаційних ефектів та
мікроструктурних перетворень у
конструкційних матеріалах.

Захист відбудеться “05” грудня 2019 р. о 15^{00} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 55.250.01 при Інституті прикладної фізики НАН України за адресою: 40000, м. Суми, вул. Петропавлівська 58.

Із дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту прикладної фізики НАН України за адресою: 40000, м. Суми, вул. Петропавлівська 58.

Автореферат розісланий “02” листопада 2019 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
кандидат фізико-математичних наук В.М. Недорешта

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Результати дослідження статистичних, динамічних та структурних особливостей складних систем показують, що багатьом природним явищам притаманна повільна недебаївська релаксація та аномальні дифузійні властивості. Теоретично та експериментально доведено, що режими, які проявляють зазначену поведінку, грають ключову роль у різноманітних процесах, які спостерігаються у таких матеріалах, як скло, рідкі кристали, колоїдні розчини, полімери, протеїни і, навіть, у цілих біологічних організмах та екосистемах. Через значне розповсюдження систем із аномальними властивостями важливою проблемою є розвинення методів їх опису та аналізу. Численні результати показують, що особливо ефективним для цих цілей є формалізм неперервних у часі випадкових блукань (continuous time random walks). Основою цього підходу є ідея про те, що розглядуваний стохастичний процес характеризується певними випадковими величинами, які відповідають за час між двома послідовними переходами системи із одного стану в інший та величиною (мірою) даного переходу. Простота цієї ідеї разом із потужністю та гнучкістю у застосуванні дає можливість ефективно описувати процеси, які на значних часових масштабах мають негауссову статистику.

Найбільш розповсюджені аномальні дифузійні явища характеризуються нелінійним у часі степеневим ростом дисперсії процесу. Однак дисперсія може бути нескінченною, і тоді доцільно говорити не про дифузійні процеси, а про процеси переносу (транспортні процеси). Наприклад, це спостерігається у випадку польотів Леві (Lévy flights), для яких дисперсія кожного стрибка частинки, а тому і її результуючого положення, є нескінченною. Встановлено, що польоти Леві описують такі явища, як індуковані спалахами світла чи імпульсами напруги транзитні токи в аморфних середовищах, розповсюдження фотонів в атмосфері та склі Леві, міграцію тварин, рух бактерій, обмін речовин всередині живих клітин, сейсмічну активність, а також моделюють інші явища фізичної, біологічної та фінансової природи. Водночас аномальні недебаєвські релаксаційні залежності в тілах зі складною структурою часто виражені більш повільним, ніж експоненціальним, законом Кольрауша-Уільямса-Уоттса (уповільненою експоненціальною функцією), а у деяких випадках взагалі степеневим спаданням релаксаційної функції. Так, недебаєвські режими релаксації спостерігаються в невпорядкованих середовищах, діелектриках, колоїдних системах, аморфних тілах, поліанілінових плівках, надохолоджених рідинах, білкових амінокислотах тощо.

Існує клас надповільних аномальних процесів, для яких еволюція системи відбувається навіть повільніше, ніж степеневим чином. Найчастіше масштабні властивості таких процесів характеризуються логарифмічним зростанням дисперсії (якщо вона існує) та оберненим логарифмічним спаданням релаксаційної функції. Проте надповільні процеси не обмежуються лише подібною поведінкою. Зокрема, в рамках підходу неперервних у часі випадкових блукань описано модель надповільної дифузії, яка узагальнює відомі до цього часу закони дифузії такого типу. Актуальним завданням є побудова теоретичних моделей та подальший розвиток методів вивчення надповільних транспортних та релаксаційних процесів, чия поведінка виходить за рамки дифузійної (навіть аномального типу) та типової релаксаційної. Такі дослідження розширюють відомі знання про клас аномальних процесів та в подальшому можуть бути використані для аналізу фізичних систем з відповідною поведінкою.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі електроніки, загальної та прикладної фізики Сумського державного університету. Результати роботи отримано під час виконання держбюджетних науково-дослідних робіт: "Вимушена та спонтанна магнітна динаміка систем одноосних наночастинок", за підтримки МОН (№ 010U001379, 2011 р.); "Аномальні дифузійні та релаксаційні властивості класичних та квантових блукань з неперервним часом", за підтримки МОН (№ 0112U001383, 2012 – 2014 рр.); "Магнітні, теплові та транспортні властивості періодично збуджених систем феромагнітних наночастинок", за підтримки МОН (№ 0116U002622, 2016 – 2018 рр.); "Спрямований транспорт та дисипація енергії в системах феромагнітних наночастинок і магнітних скірміонів", за підтримки МОН (№ 0119U100772, 2019 р.).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є послідовне теоретичне дослідження еволюції надповільних польотів Леві та аномальних релаксаційних процесів у дворівневих системах за допомогою методу неперервних у часі випадкових блукань.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання:

• узагальнити метод неперервних у часі випадкових блукань на випадок важких хвостів розподілу довжин стрибків процесу та надважких хвостів розподілу часів очікування між ними;

• знайти всі можливі граничні густини ймовірності та відповідні їм масштабуючі функції часу, що визначають асимптотичну поведінку надповільних польотів Леві;

• провести класифікацію граничних густин ймовірності та масштабуючих функцій в залежності від параметрів розподілів довжин стрибків та часів очікування між ними;

• знайти альтернативні представлення граничних густин ймовірності, з їх допомогою детально проаналізувати властивості цих густин, та порівняти аналітичні результати з результатами чисельного моделювання;

• в рамках моделі неперервних у часі випадкових блукань отримати рівняння релаксації для дворівневих систем, структурні елементи яких є незалежними і еволюціонують у відповідності з дихотомічним процесом;

• визначити всі можливі асимптотичні закони релаксації у дворівневих системах для випадків, коли розподіли часів перебування дихотомічного процесу у двох своїх станах мають важкі та/або надважкі хвости;

• знайти точні розв'язки релаксаційного рівняння та порівняти їх, а також асимптотичні закони релаксації, з отриманими шляхом чисельного моделювання результатами.

Об'єкт досліджень. Процеси еволюції в нерівноважних системах, параметри стану яких описуються повільними та надповільними випадковими блуканнями з неперервним часом.

Предмет досліджень. Транспортні та релаксаційні властивості стохастичних систем із аномально повільною поведінкою.

Методи досліджень. У дисертаційній роботі проведено дослідження аномально повільних транспортних та релаксаційних процесів на основі методів статистичної та математичної фізики, теорії стохастичних систем, методів числового моделювання. Зокрема, густина ймовірності для надповільних польотів Леві знаходилася із використанням теорії неперервних у часі випадкових блукань, теорії ймовірностей та теорії рівняння Ланжевена. Відповідні граничні розподіли та масштабуючі функції знаходилися за допомогою підходів, що базуються на методах інтегральних перетворень, асимптотичного аналізу та тауберової теорії. Для вивчення властивостей отриманих граничних розподілів використовувалися знання із теорії спеціальних функцій та теорії функцій комплексної змінної. При отриманні релаксаційних рівнянь для дворівневих систем використовувалися підходи теорії неперервних у часі випадкових блукань, теорії ймовірностей та операційного числення. Дослідження роз'язків релаксаційного рівняння проводилося, виходячи із методів асимптотичного аналізу, тауберової теорії, а також комплексного інтегрування. Числове моделювання здійснювалося на основі методу Монте-Карло із використанням методів генерування випадкових величин із заданими розподілами, а чисельний розв'язок інтегральних рівнянь базувався на методі квадратур.

Наукова новизна одержаних результатів:

• Вперше запропоновано теорію надповільних польотів Леві, що базується на неперервних у часі випадкових блуканнях, для яких розподіли часів очікування між послідовними стрибками характеризуються надважкими хвостами, а розподіли довжин стрибків – важкими хвостами.

• Вперше знайдено всі граничні густини ймовірності для надповільних польотів Леві та проведено їх повну класифікацію в залежності від параметрів розподілів довжин стрибків та часів очікування між ними.

• Визначено різні форми представлення граничних густин ймовірності для надповільних польотів Леві, що використовують інтегральні перетворення, H-функції Фокса та швидко збіжні степеневі ряди, за допомогою яких вперше проведено детальний аналіз поведінки цих густин, а в окремих випадках знайдено їх явні вирази в термінах простих спеціальних функцій.

• В рамках теорії неперервних у часі випадкових блукань вперше побудовано модель релаксаційних процесів у дворівневих системах, структурні елементи яких незалежні і змінюються згідно з дихотомічним процесом, розподіли часів перебування якого у "верхньому" та "нижньому" станах характеризуються важкими та/або надважкими хвостами.

• Вперше знайдено всі асимптотичні закони релаксації для дворівневих систем з важкими та/або надважкими хвостами зазначених розподілів, проведено їх класифікацію, а в окремих випадках отримано точні закони релаксації.

Практичне значення одержаних результатів. Одержані у дисертації результати поглиблюють фундаментальні уявлення про статистичні властивості систем із аномально повільною поведінкою та розвивають методи їх опису. Зокрема, в роботі досліджено транспортні властивості надповільних польотів Леві, для яких є характерними довгі стрибкоподібні переходи між станами, а їх еволюція – набагато повільніша за степеневу. Крім того, детально розглянуто перебіг релаксаційних процесів у дворівневих системах, що змінюються згідно з дихотомічним процесом. Такі дворівневі системи апроксимують велику кількість більш складних систем і особливо зручні для їх аналізу у разі повільної степеневої та надповільною поведінки їх структурних елементів. Як наслідок, коло досліджених аномальних транспортних та релаксаційних процесів розширено до класу тих, що проявляють надповільну еволюцію.

Результати роботи можуть бути використані при моделюванні та прогнозуванні поведінки широкого кола систем, в тому числі магнітних, із аномальною еволюцією, а також при обробці відповідної статистичної інформації. В окремих випадках отримані результати описують залежності, що спостерігаються для аномально повільних релаксаційних процесів, пов'язаних з ущільненням гранульованих матеріалів та адсорбцією-десорбцією речовин поверхнями субстратів. До того ж отримані результати можуть бути використані при дослідженні особливостей руху вакансій у неоднорідних середовищах, захопленні об'єктів дислокаціями і т.д.

Особистий внесок дисертанта полягає у пошуку та аналізі літературних джерел, а також проведенні наукового дослідження за темою дисертації. Результати дисертації базуються на дослідженнях, здійснених як у співпраці з науковим керівником – д-р. фіз.-мат. наук, професором С. І. Денисовим, так і особисто автором. Постановка мети дисертаційної роботи, наукових завдань, методів їх вирішення та аналізу, а також обговорення отриманих результатів проводилася разом із науковим керівником. Здобувач брав участь на всіх етапах наукового дослідження: у проведенні аналітичних розрахунків та числового моделювання, аналізі одержаних результатів, оформленні та публікації наукових праць.

У роботі [1] автор приймав участь у аналітичному знаходженні граничних густин ймовірності для симетричних надповільних польотів Леві та їх представленні у вигляді спеціальних функцій.

У роботі [2] автор брав участь у аналітичному та числовому знаходженні асимптотичних розв'язків рівняння Монтролла-Вейсса для несиметричних надповільних польотів Леві, аналізі граничних густин ймовірності та отриманні їх альтернативних представлень.

У роботах [3, 6], використовуючи модель неперервних у часі випадкових блукань з надважкими хвостами розподілів часів очікування процесу між стрибками, автором запропоновано алгоритм та проведено детальне числове дослідження надповільних польотів Леві та надповільних дифузійних процесів.

У роботі [4] автор брав участь у виведенні релаксаційного рівняння для симетричної дворівневої системи, аналітичному отриманні асимптотичних співвідношень для аномальних законів релаксації та у числовому дослідженні розглядуваних процесів.

У роботі [5] автором дисертації знайдено релаксаційне рівняння для несиметричної моделі дворівневої системи, а також його асимптотичні розв'язки у разі повільної та надповільної релаксації. Крім того, проведено числовий роз'язок інтегральних релаксаційних рівнянь та числове моделювання досліджуваного процесу.

У роботах [15, 16] автор приймав участь у аналітичному та числовому знаходженні точних розподілів для стрибкоподібних стохастичних процесів, що моделюються рівнянням Ланжевена з білим шумом Пуассона.

Основна частина наукових результатів особисто представлялась дисертантом на національних і міжнародних наукових конференціях і семінарах [7–14]. Усі наукові положення та висновки, винесені на захист, належать автору дисертації.

Апробація результатів дисертації. Основні наукові результати дисертаційної роботи оприлюднено та обговорено на наступних конференціях і семінарах: Proceedings of the 3rd International Conference "Quantum Electrodynamics and Statistical Physics" (Kharkiv, 2011 р.); Науково-технічній конференції "Фізика, електроніка, електротехніка" (Суми, 2011, 2012, 2013, 2015 рр.); The 2nd International Conference "Nanomaterials: Applications and Properties" (Alushta, 2012 р.); Школа-семінар "Багатомасштабне моделювання фізичних процесів у конденсованих середовищах" (Суми, 2014 р.); Науково-технічній конференції "Інформатика, математика, автоматика" (Суми, 2019 р.).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковані у 16 наукових працях, із них: 5 статей у провідних фахових журналах, що індексуються наукометричними базами Scopus та Web of Science; 2 статті у провідному фаховому журналі, що індексується наукометричною базою Scopus; 1 стаття у матеріалах Міжнародної наукової конференції та 8 тез доповідей на конференціях.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається із вступу, п'яти розділів, висновків, переліку використаних джерел та додатків. Зміст дисертації викладено на 240 сторінках друкованого тексту, з яких 168 сторінок основного тексту, що містить 23 рисунка. Список використаних джерел складається із 381 найменування, розміщеного на 32 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обгрунтована актуальність теми дисертаційної роботи, її зв'язок з науковими програмами, планами та темами, поставлена мета та завдання наукової праці, окреслені об'єкт, предмет та методи дослідження. Вказана наукова новизна та практичне значення одержаних результатів, наведено особистий внесок дисертанта у наукову роботу, а також дані стосовно опублікованих матеріалів, структури та змісту наукової праці.

У **першому розділі** "Аномальні стохастичні процеси та методи їх опису" представлено літературний огляд провідних досліджень по темі дисертаційної роботи.

В *першому* підрозділі розглянуто важливі приклади аномальних транспортних та релаксаційних законів, а також зазначено стохастичні системи, в яких вони спостерігаються.

У *другому* підрозділі відмічено основні характерні риси, які виділяють процеси із аномальною статистикою з-поміж інших випадкових процесів та наведено приклади фізичних явищ, що описуються згідно із концепцією процесів Леві.

В *третьому* підрозділі обговорено деякі ключові методи опису аномальних процесів та можливості їх застосування. Зокрема, здійснено огляд теорії неперервних у часі випадкових блукань та розглянуто використання рівняння Ланжевена для опису стрибкоподібних явищ. Крім того, наведено основні засади методу субординаційної системи рівнянь Ланжевена, що дозволяє побудувати зв'язок між підходом Ланжевена та неперервними у часі випадковими блуканнями.

Зважаючи на розглянуті дослідження, окреслено ряд відкритих проблем, вирішенню яких присвячена дисертаційна робота.

У **другому розділі** роботи "Асимптотичні у часі розв'язки для надповільних польотів Леві", використовуючи теорію неперервних у часі випадкових блукань, описано модель надповільних польотів Леві та знайдено їх асимптотичні у часі розподіли, які визначають ключові властивості даного стохастичного процесу.

У *першому* підрозділі представлено модель випадкових блукань, для яких є характерними розподіли $w(\xi)$ довжин стрибків процесу $X(t)$ (положення блукаючої частинки) з важкими хвостами та розподіли $p(\tau)$ його часів очікування в поточному положенні з надважкими хвостами. Згідно з теорією неперервних у часі випадкових блукань, якщо довжини стрибків та часи очікування є незалежними, то для процесу $X(t)$ його густина розподілу $P(x,t)$ дається рівнянням Монтролла-Вейсса ($x \xrightarrow{\mathcal{F}} k$, $t \xrightarrow{\mathcal{L}} s$)

$$P_{ks} = \frac{1 - p_s}{s(1 - p_s w_k)}. \tag{1}$$

Змінні k та s відповідають перетворенням Фур'є ($\mathcal{F}$) та Лапласа ($\mathcal{L}$).

Надважкі розподіли часів очікування задаються асимптотичною поведінкою $p(\tau) \sim \varrho(\tau)/\tau$ ($\tau \to \infty$), де $\varrho(\tau)$ – функція, що повільно змінюється на нескінченності, тобто $\varrho(\nu\tau) \sim \varrho(\tau)$ при $\tau \to \infty$ для всіх $\nu > 0$. В свою чергу важкі розподіли довжин стрибків характеризуються степеневими хвостами $w(\xi) \sim u_\pm/|\xi|^{1+\alpha_\pm}$ ($\xi \to \pm\infty$), де константи $u_\pm > 0$ і хвостові індекси $\alpha_\pm \in (0,2]$. Таким чином, для довжин випадкових стрибків дисперсія є нескінченною, для часів очікування нескінченними є всі їх додатні дробові моменти, а тому задана модель описує надповільні польоти Леві.

Під асимптотичним розв'язком рівняння (1) мається на увазі гранична густина ймовірності

$$\mathcal{P}(y) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{a(t)}\, P\left(\frac{y}{a(t)}, t\right) \tag{2}$$

спеціальним чином масштабованого положення частинки $Y(t) = a(t)X(t)$ при $t \to \infty$, де $a(t) \to 0$ – відповідна масштабуюча функція. Набір функцій $\mathcal{P}(y)$ та $a(t)$ повністю задає еволюцію масштабованих польотів Леві при великих значеннях часу. При цьому вибір $a(t)$ залежить від поведінки на нескінченності розподілів $p(\tau)$ та $w(\xi)$ і здійснюється таким чином, щоб густина $\mathcal{P}(y)$ була невиродженою.

Другий підрозділ присвячено аналітичному знаходженню граничних густин ймовірності $\mathcal{P}(y)$ та відповідних їм масштабуючих функцій $a(t)$. Із рівнянь (1) і (2), з використанням тауберової теореми Карамати, отримано представлення $\mathcal{P}(y)$ у вигляді оберненого перетворення Фур'є

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{-iky}}{1 + \Phi(k)}, \tag{3}$$

де введено $\Phi(k) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1 - w_{ka(t)}}{V(t)}$. В останній формулі $V(t) = \int_t^\infty d\tau p(\tau)$ – ймовірність відсутності стрибка процесу протягом часу t. Як бачимо, функції $\Phi(k)$, а тому і граничні густини ймовірності $\mathcal{P}(y)$, визначаються асимптотичною поведінкою w_k при $k \to 0$. У такий спосіб, в залежності від хвостових параметрів $w(\xi)$, проведено класифікацію всіх можливих розв'язків для масштабованих надповільних польотів Леві.

Зокрема, для розподілів довжин стрибків процесу з середнім значенням $l_1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi w(\xi) \neq 0$ показано, що із рівняння (3) випливає односторонній експоненціальний розподіл та масштабуюча функція

$$\mathcal{P}(y) = e^{-|y|} H(l_1 y), \quad a(t) \sim V(t)/|l_1|, \tag{4}$$

де $H(\cdot)$ – функція Хевісайда.

Розподіли довжин стрибків з $l_1 = 0$ і $\alpha \in (1, 2)$, а також з $\alpha \in (0, 1)$ приводять до наступної граничної густини та масштабуючої функції

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{(1 + \cos\varphi\, k^\alpha)\cos(yk) + \sin\varphi\, k^\alpha \sin(yk)}{1 + 2\cos\varphi\, k^\alpha + k^{2\alpha}}, \tag{5}$$

$$a(t) \sim \left(V(t)/\sqrt{q^2 + r^2}\right)^{1/\alpha}, \tag{6}$$

де $\alpha = \min\{\alpha_\pm\}$ – найменший хвостовий індекс $w(\xi)$, що відіграє домінуючу роль у визначенні статистичних властивостей процесу. Крім того, тут введено позначення $\cos\varphi = q/\sqrt{q^2 + r^2}$ і $\sin\varphi = r/\sqrt{q^2 + r^2}$, а константи q і r задаються параметрами хвостів функції $w(\xi)$.

Для розподілів довжин стрибків з $\alpha = 1$ і параметром $\rho = u_+ \delta_{1\alpha_+} - u_- \delta_{1\alpha_-} \neq 0$ ($\delta_{a,b}$ – символ Кронекера) гранична густина ймовірності та масштабуюча функція визначаються відповідно формулами

$$\mathcal{P}(y) = e^{-|y|} H(\rho y), \quad a(t) \sim \frac{V(t)}{|\rho| \ln[1/V(t)]}. \tag{7}$$

Як бачимо, густина $\mathcal{P}(y)$ знову є односторонньою експоненціальною. Якщо ж параметр $\rho = 0$ (тобто при $\alpha_\pm = 1$ і $u_\pm = u$), то маємо

$$\mathcal{P}(y) = -\frac{1}{\pi}[\sin(|y|)\,\mathrm{si}(|y|) + \cos(y)\,\mathrm{Ci}(|y|)], \quad a(t) \sim \frac{V(t)}{\pi u}. \tag{8}$$

Тут $\mathrm{si}(y)$ і $\mathrm{Ci}(y)$ – інтегральний синус і косинус відповідно.

Нарешті, останній випадок включає розподіли $w(\xi)$ з $l_1 = 0$ і хвостовим індексом $\alpha = 2$ (тобто $\alpha_\pm = 2$). За цих умов

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{2} e^{-|y|}, \quad a(t) \sim 2\sqrt{\frac{V(t)}{(u_+ + u_-)\ln[1/V(t)]}}, \tag{9}$$

а тому густина $\mathcal{P}(y)$ є двосторонньою експоненціальною.

У *третьому* підрозділі розглянуто питання транспортних властивостей оригінальних (немасштабованих) надповільних польотів Леві. Показано, що для процесу $X(t)$ дисперсія є нескінченною при будь-яких значеннях t, а скейлінг в системі задається масштабуючими функціями $a(t)$ (це випливає із співвідношення (2)). Дані функції відносяться до класу тих, що повільно змінюються на нескінченності. А тому еволюція густин ймовірності $P(x,t)$ буде надповільною, тобто $P(x, \nu t) \sim P(x,t)$ при $t \to \infty$ для всіх $\nu > 0$. Іншими словами, за будь-які кінцеві інтервали часу зміна профілю розподілу випадкового процесу $X(t)$ буде дуже малою, незважаючи на можливість здійснювати великі стрибки. Цей результат є цікавим наслідком моделі, в якій мають місце два в певній мірі протилежні механізми: миттєві довгі стрибки процесу та дуже довгі часи очікування.

У **третьому розділі** “Дослідження основних характеристик граничних густин ймовірності” продовжено вивчення надповільних польотів Леві та отримано ряд теоретичних результатів, що дозволяють всебічно проаналізувати ключові властивості розглядуваної моделі.

Перший підрозділ відображає альтернативні представлення отриманої у попередньому розділі густини ймовірності $\mathcal{P}(y)$. Зокрема, знайдено представлення $\mathcal{P}(y)$ у вигляді оберненого перетворення Мелліна

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dr \frac{\Gamma(r) \sin\left[\phi(y)\frac{1-r}{\alpha}\right]}{\alpha \sin\left(\pi \frac{1-r}{\alpha}\right)} |y|^{-r}, \qquad (10)$$

де $\phi(y) = \frac{\pi\alpha}{2} + \mathrm{sgn}(y)\varphi$, $\mathrm{sgn}(y)$ – знак змінної y, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функція та $\max(1-\alpha, 0) < c < 1$. Далі із формули (10) отримано подання $\mathcal{P}(y)$ у вигляді H-функцій Фокса, які грають важливу роль у теорії аномальних процесів, та у вигляді степеневих рядів, що є зручними для числових розрахунків. Крім того, із виразу (10) випливає представлення $\mathcal{P}(y)$ у формі перетворення Лапласа

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dx\, e^{-|y|x} \frac{\sin[\phi(y)]x^\alpha}{1 + 2\cos[\phi(y)]x^\alpha + x^{2\alpha}}. \qquad (11)$$

Це представлення є найбільш корисним для визначення багатьох загальних властивостей густин ймовірності $\mathcal{P}(y)$. Наприклад, із нього випливає, що $\mathcal{P}(y) \geq 0$, $d\mathcal{P}(y)/d|y| \leq 0$ $(y \neq 0)$ і $\max \mathcal{P}(y) = \mathcal{P}(0)$. Таким чином, функція $\mathcal{P}(y)$ є унімодальною густиною ймовірності. Як свідчить рис. 1, аналітичні результати повністю узгоджуються з числовими.

У *другому* підрозділі для неекспоненціальних густин ймовірності $\mathcal{P}(y)$ знайдена їх поведінка при малих та великих значеннях масштабованої змінної y. Поведінка $\mathcal{P}(y)$ при $|y| \to 0$ безпосередньо випливає із подання $\mathcal{P}(y)$ у вигляді степеневого ряду. В той же час вираз (11) та лема Ватсона дозволяють знайти повний асимптотичний розклад $\mathcal{P}(y)$ при $|y| \to \infty$. Із нього встановлено, що в усіх неекспоненціальних випадках хоча б один хвіст розподілів $\mathcal{P}(y)$ є важким і пропорційним функції $|y|^{-1-\alpha}$.

У *третьому* підрозділі досліджується асимптотична поведінка густини ймовірності $P(x,t)$ немасштабованого положення процесу $X(t)$ у режимі рідкісних флуктуацій. Із результатів попереднього підрозділу і скейлінгового співвідношення $P(x,t) \sim a(t)\mathcal{P}[a(t)x]$ слідує, що для розподілів $P(x,t)$, які є відповідними неекспоненціальним густинам $\mathcal{P}(y)$, хоча б один хвіст також буде важким і пропорційним $|x|^{-1-\alpha}$. Проте експоненціальні густини $\mathcal{P}(y)$ коректно задають поведінку $P(x,t)$ тільки в центральній області $|x| \propto O[1/a(t)]$. Причина полягає в тому, що при $t \to \infty$ вклад в вираз (3) дають головні члени розкладу $1 - w_k$ $(k \to \infty)$, що є аналітичними та не відображають наявність важких хвостів у $w(\xi)$. А тому, врахувавши додаткові неаналітичні члени розкладу $1 - w_k$, отримано поведінку $P(x,t)$ в області $|x| \gg O[1/a(t)]$ рідкісних флуктуацій $X(t)$. Ці уточнення показують, що розподіли $P(x,t)$ завжди мають один або два

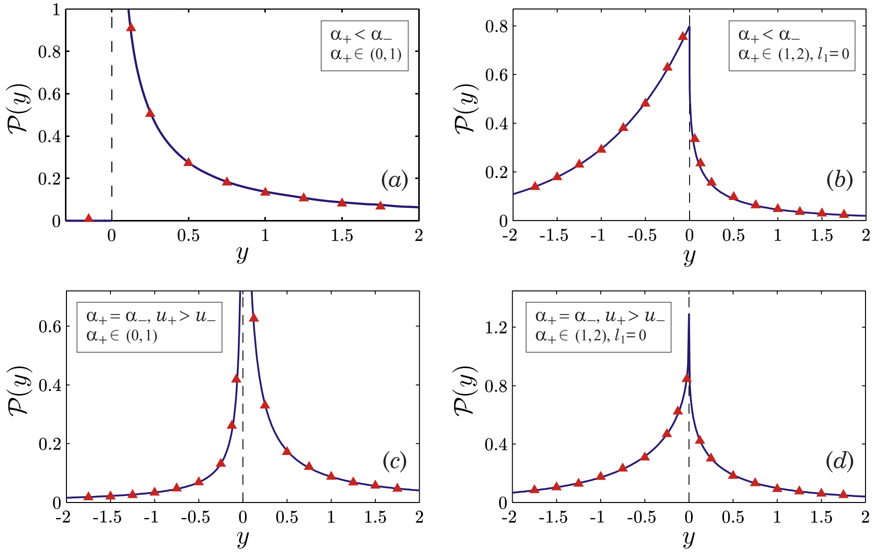

Рис. 1. Типовий вигляд неекспоненціальних граничних густин $\mathcal{P}(y)$ при різних значеннях параметрів розподілів $w(\xi)$. Суцільні лінії – точні аналітичні залежності, а маркери – результати числового моделювання.

важких хвоста, що пропорційні $|x|^{-1-\alpha}$. Дані результати узгоджуються з тим фактом, що для досліджуваної моделі дисперсія процесу $X(t)$ є нескінченною при будь-яких значеннях часу.

У *четвертому* підрозділі наведено альтернативне знаходження асимптотичних розв'язків для масштабованих польотів Леві, що демонструє зв'язок даного процесу з центральною граничною теоремою. Введено густини ймовірності $P_{X_n}(x)$ положення $X_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$ ($\{\xi_j\}$ – довжини випадкових стрибків) за умови, що кількість стрибків n є фіксованою величиною. Застосовуючи метод характеристичних функцій показано, що при $n \to \infty$ густини ймовірності $P_{X_n}(x)$ мають вигляд α-стійких розподілів Леві з параметрами, що задаються хвостами $w(\xi)$.

Використовуючи теорію рівняння Монтролла-Вейсса, встановлено, що кількість стрибків $N(t)$ процесу $X(t)$ за час $t \to \infty$ має розподіл $\Lambda(n,t) \sim V(t)e^{-nV(t)}$. При цьому густина ймовірності $P(x,t)$ визначається усередненням $P_{X_n}(x)$ відносно розподілу $\Lambda(n,t)$, тобто $P(x,t) = \langle P_{X_n}(x) \rangle = \int_0^\infty dn P_{X_n}(x)\Lambda(n,t)$. А далі, задаючи необхідні масштабуючі функції $a(t)$, на основі формули (2) знайдено всі граничні густини $\mathcal{P}(y)$.

У *п'ятому* підрозділі модель надповільних польотів Леві досліджується, виходячи із концепції субординаційних рівнянь Ланжевена. В неперервній реалізації стрибкоподібна модель замінюється системою стохастичних диференціальних рівнянь $\frac{d}{dv}X(v) = \xi(v)$ і $\frac{d}{dv}t(v) = \tau(v)$, де v – операційній (внутрішній) час, що відіграє роль кількості "кроків" процесу $X(t)$. Таким чином, величини стрибків та часи очікування подаються відповідно як важкий шум $\xi(v)$ та надважкий шум $\tau(v)$.

Розподіл $R(x,v)$ для процесу $X(v)$ отримано безпосередньо із рівняння Фоккера-Планка для першого стохастичного рівняння в системі. Він має вигляд α-стійкого розподілу Леві з параметрами, які задаються хвостами $w(\xi)$. Із другого стохастичного рівняння знайдено розподіл $F(t,v)$ для процесу $t(v)$. З його допомогою при $t\to\infty$ отримано розподіл $G(v,t)\sim V(t)e^{-vV(t)}$ для процесу $v(t)$, що є оберненим до $t(v)$. При цьому густина ймовірності $P(x,t)$ задається декомпозицією $P(x,t)=\int_0^\infty dvR(x,v)G(v,t)$. Після введення відповідних масштабуючих функцій $a(t)$ із формули (2) знову встановлено всі граничні густини $\mathcal{P}(y)$.

У *шостому* підрозділі знайдено дробове рівняння для густин $\mathcal{P}(y)$. Дробова по координаті y похідна Рісса-Феллера ${}_yD_\theta^\gamma$ у просторі Фур'є задається як $\mathcal{F}\{{}_yD_\theta^\gamma f(y)\}=-e^{i\text{sgn}(k)\pi\theta/2}|k|^\gamma f_k$, де $\gamma\in(0,2]$ – порядок похідної та θ – коефіцієнт асиметрії ($|\theta|\le\min\{\gamma,2-\gamma\}$). Дане означення та формула (3) приводять до наступного компактного дробового рівняння ${}_yD^\alpha_{-2\varphi/\pi}\mathcal{P}(y)=\mathcal{P}(y)-\delta(y)$, де $\delta(y)$ – дельта-функція.

У *сьомому* підрозділі проведено числове моделювання надповільних польотів Леві. Зокрема, запропоновано алгоритм моделювання досліджуваного класу випадкових блукань, в основі якого лежить метод інверсії, а також наведено приклади його застосування для моделювання розподілу масштабованого процесу $Y(t)$. Результати числового моделювання повністю підтвердили всі аналітично отримані залежності.

Четвертий розділ "Режими релаксації у дворівневих системах" присвячено вивченню релаксаційних процесів у дворівневих системах, структурні елементи яких є незалежними один від одного, а їх властивості змінюються відповідно до дихотомічного процесу. Зокрема, одержано рівняння, що описує релаксацію в даних системах, а також знайдено його аномально повільні асимптотичні розв'язки.

У *першому* підрозділі побудовано модель процесу релаксації для зазначених систем та одержано відповідне релаксаційне рівняння. В рамках дихотомічного наближення стан кожного структурного елемента системи пов'язується з дихотомічним процесом $f(t)$. Даний процес протягом випадкових проміжків часу $\{\tau_n\}$ $(n=\overline{1,\infty})$ почергово приймає значення $+1$ ("верхній" стан системи) або -1 ("нижній" стан системи). При цьому вважається, що $t_0=0$ і $f(t_0)=1$, часи очікування $\{\tau_n\}$ розподілені із густинами ймовірності $p^\pm(\tau)$, де знаки "$\pm$" відповідають перебуванню системи в станах ±1 відповідно, а релаксаційна функція $\mu(t)$ визначається як середнє значення дихотомічного процесу $f(t)$, тобто $\mu(t)=\langle f(t)\rangle$. Згідно з цим визначенням, величина $\mu(t)$ дорівнює різниці ймовірностей знайти систему в станах $+1$ та -1 в момент часу t.

Виходячи із теорії неперервних у часі випадкових блукань показано, що у просторі Лапласа рівняння релаксації зводиться до

$$\mu_s = \frac{1}{1 - p_s^+ p_s^-}\left(\frac{1 - p_s^+}{s} - p_s^+ \frac{1 - p_s^-}{s}\right). \tag{12}$$

Застосовуючи до (12) обернене перетворення Лапласа, отримано інтегральне рівняння для релаксаційної функції $\mu(t)$. Воно, зокрема, показує, що в загальному випадку розглядувані релаксаційні процеси характеризуються ефектами пам'яті.

У *другому* підрозділі знайдено закони релаксації $\mu(t)$ дворівневих систем при великих значеннях часу для класів розподілів $p^{\pm}(\tau)$, що характеризуються важкими та надважкими хвостами. Вибір цих класів функцій обумовлений тим, що саме вони відповідальні за аномальну повільну релаксацію. Визначення та класифікація всіх можливих режимів релаксації при великих t базувалися на використанні розкладу $p_s^{\pm}$ при $s \to 0$ та застосуванні тауберової теореми Карамати до рівняння (12). Зауважимо, що у несиметричному випадку (коли $p^+(\tau) \neq p^-(\tau)$) аналіз проведено за умови $p^+(\tau) \gg p^-(\tau)$; якщо ж $p^+(\tau) \ll p^-(\tau)$, то потрібно просто поміняти місцями індекси “+” і “−” та замінити функцію $\mu(t)$ на $-\mu(t)$.

Як і в другому розділі роботи, важкі розподіли визначаються асимптотичною поведінкою $p^{\pm}(\tau) \sim q_{\pm}/\tau^{1+\alpha_{\pm}}$ $(\tau \to \infty)$ з константами $q_{\pm} > 0$ і хвостовими індексами $\alpha_{\pm} \in (0, 2]$. Встановлено, що в залежності від хвостових параметрів густин ймовірності $p^{\pm}(\tau)$ в несиметричних дворівневих системах релаксація при $t \to \infty$ може відбуватися за степеневим, $\mu(t) \sim \mu_{\infty} - (t/T)^{-\beta}$, модифікованим степеневим, $\mu(t) \sim 1 - \ln(t)(t/T)^{-\beta}$, або оберненим логарифмічним, $\mu(t) \sim 1 - \eta/\ln t$, законом. У випадку ж симетричної релаксації, тобто при $p^{\pm}(\tau) = p(\tau)$, встановлено, що завжди $\mu(t) \sim (t/T)^{-\beta}$. В наведених формулах показник β, час релаксації T, константа η та граничне значення μ_{∞} є різними для кожного випадку і задаються характеристиками розподілів $p^{\pm}(\tau)$. Типова поведінка законів релаксації при $\alpha_+ \in (0, 1)$ і $\alpha_- \in (1, 2)$ показана на рис. 2a.

Асимптотична поведінка надважких густин ймовірності $p^{\pm}(\tau)$ має вигляд $p^{\pm}(\tau) \sim \varrho_{\pm}(\tau)/\tau$ $(\tau \to \infty)$, де $\varrho_{\pm}(\tau)$ – функції, що повільно змінюються на нескінченності. У несиметричному випадку встановлено, що при великих t відбувається надповільна релаксація за законом $\mu(t) \sim 1 - 2V^-(t)/V^+(t)$, де ймовірності $V^{\pm}(\tau)$ визначаються як $V^{\pm}(\tau) = \int_t^{\infty} d\tau p^{\pm}(\tau)$. Частковим випадком такої поведінки є вже згадувана обернена логарифмічна релаксація. Якщо розподіл $p^+(\tau)$ є надважким, а $p^-(\tau)$ – важким, тоді релаксаційні режими описуються модифікованим степеневим законом $\mu(t) \sim 1 - U(t)(t/T)^{-\beta}$, де функція $U(t)$ повільно змінюється на нескінченності та визначається густинами $p^{\pm}(\tau)$ (див. рис. 2b). У той же час для симетричних систем закон релаксації має вигляд $\mu(t) \sim V(t)/2$.

У *третьому* підрозділі отримано дробові релаксаційні рівняння для ефективної релаксаційної функції $\mu_{\text{eff}}(t)$. Дана функція при великих зна-

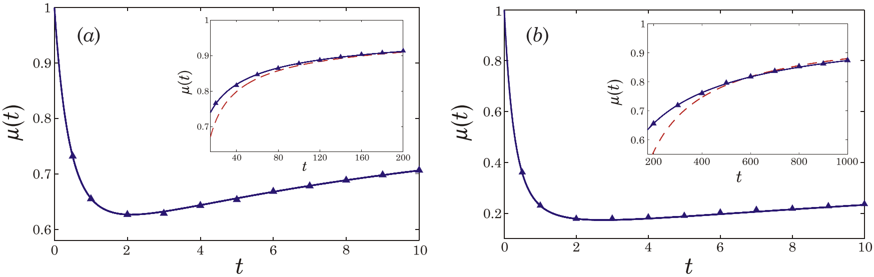

Рис. 2. Типова поведінка аномальних законів релаксації. Суцільні лінії показують числовий розв'язок рівняння (12), *пунктирні лінії – відповідні асимптотичні формули, а маркери – результати числового моделювання. Панель* (a) *відповідає випадку* $\alpha_+ = 0.5$ *і* $\alpha_- = 1.5$, *а панель* (b) *– випадку, коли* $p^+(\tau)$ *має надважкий хвіст і* $\alpha_- = 1.5$.

ченнях часу еквівалентна $\mu(t)$, тобто $\mu_{\text{eff}}(t) \sim \mu(t)$ при $t \to \infty$. Для несиметричних та симетричних систем такі рівняння мають відповідно вигляд

$$\mu_{\text{eff}}(t) - \frac{T_{\text{eff}}^{-\beta}\mu_\infty}{\Gamma(1+\beta)} t^\beta = -T_{\text{eff}}^{-\beta}\, {}_0\mathcal{D}_t^{-\beta} \mu_{\text{eff}}(t), \tag{13}$$

$$\mu_{\text{eff}}(t) - 1 = -T_{\text{eff}}^{-\beta}\, {}_0\mathcal{D}_t^{-\beta} \mu_{\text{eff}}(t). \tag{14}$$

В цих формулах $T_{\text{eff}} = T[\Gamma(1-\beta)]^{1/\beta}$ – ефективний релаксаційний час, а оператор ${}_0\mathcal{D}_t^{-\beta}$ – дробова похідна Рімана-Ліувілля ($\mathcal{L}\{{}_0\mathcal{D}_t^{-\beta} g(t)\} = s^{-\beta} g_s$). Відмітимо, що точні розв'язки рівнянь (13) і (14) мають відповідно вигляд $\mu_{\text{eff}}(t) = \mu_\infty - E_\beta\left[-(t/T_{\text{eff}})^\beta\right]$ і $\mu_{\text{eff}}(t) = E_\beta\left[-(t/T_{\text{eff}})^\beta\right]$, де $E_\beta(\cdot)$ – функція Міттаг-Леффлера. Наведено приклади використання дробових релаксаційних рівнянь для дослідження аномальних процесів, обговорено деякі підходи до опису недебаєвських релаксаційних режимів та їх зв'язок із побудованою в роботі моделлю.

У **п'ятому розділі** "Точні результати для релаксаційних процесів у дворівневих системах" основну увагу приділено отриманню точних релаксаційних законів для зазначених дворівневих систем. Зокрема, знайдено релаксаційні функції, що демонструють дебаєвську, складну осцилюючу або типову для процесів Леві степеневу релаксацію.

У *першому* підрозділі, виходячи із запропонованої моделі релаксаційного процесу, розглянуто класичну дебаєвську релаксацію. Встановлено, що така релаксація відбувається, якщо густини ймовірності часів очікування є експоненціальними, тобто $p^\pm(\tau) = \overline{\tau}_\pm^{-1} e^{-t/\overline{\tau}_\pm}$, де параметр $\overline{\tau}_\pm$ – середній час перебування системи в "верхньому/нижньому" станах. В цьому випадку відповідне інтегральне релаксаційне рівняння зводиться до диференціального, система не проявляє ефектів пам'яті та релаксаційний закон має простий експоненціальний вигляд $\mu(t) = (1-\mu_\infty)e^{-t/T} + \mu_\infty$ з величинами $\mu_\infty = \frac{\overline{\tau}_+ - \overline{\tau}_-}{\overline{\tau}_+ + \overline{\tau}_-}$ і $T = \frac{\overline{\tau}_+\overline{\tau}_-}{\overline{\tau}_+ + \overline{\tau}_-}$.

У *другому* підрозділі розглянуто релаксацію Ерланга, для якої часи перебування системи в дозволених станах розподілені згідно з густинами ймовірності $p^{\pm}(\tau) = \Theta_{\pm}\tau^{\kappa_{\pm}-1}e^{-\lambda_{\pm}\tau}$, де $\kappa_{\pm} > 0$ – параметри, які визначають форму розподілів, $\lambda_{\pm} > 0$ – масштабні параметри, що пов'язані з інтенсивностями переходів системи між станами (середній час перебування в "верхньому/нижньому" станах $\overline{\tau}_{\pm} = \kappa_{\pm}/\lambda_{\pm}$), та константи $\Theta_{\pm} = \lambda_{\pm}^{\kappa_{\pm}}/\Gamma(\kappa_{\pm})$. Встановлено, зокрема, що у симетричному випадку, коли $\kappa_{\pm} = \kappa$ – ціле число і $\lambda_{\pm} = \lambda$, релаксація є осцилюючою (див. рис. 3)

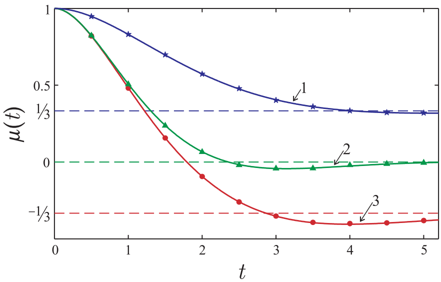

Рис. 3. Осцилюючі релаксаційні режими у випадку розподілів Ерланга з параметрами $\kappa = 2$, (1) $\overline{\tau}_+ = 2, \overline{\tau}_- = 1$; (2) $\overline{\tau}_{\pm} = 1$ та (3) $\overline{\tau}_+ = 1, \overline{\tau}_- = 2$. Суцільні лінії – аналітичні залежності, маркери – результати моделювання.

$$\mu(t) = \frac{\theta_\kappa}{\kappa}e^{-2\lambda t} + \frac{2}{\kappa}\sum_{l=1}^{[\kappa/2]}\left[\cos(\beta_l\lambda t) + \frac{\beta_l}{1-\alpha_l}\sin(\beta_l\lambda t)\right]e^{-(1-\alpha_l)\lambda t}. \qquad (15)$$

Тут $\theta_\kappa = 0$ або 1, якщо κ – парне чи непарне число відповідно, $[\kappa/2]$ – ціла частина $\kappa/2$, а також α_l і β_l – величини, які залежать від κ.

У *третьому* підрозділі вивчено релаксацію Міттаг-Леффлера, що характеризується густинами ймовірності $p^{\pm}(\tau) = -\frac{d}{d\tau}E_{\alpha_{\pm}}(-\tau^{\alpha_{\pm}})$ з $\alpha_{\pm} \in (0,1]$. Поклавши $\alpha = \alpha_+$ і $\beta = \alpha_-$, в цьому випадку отримано закони релаксації у вигляді швидко збіжних рядів для $\alpha < \beta$ та $\alpha > \beta$ відповідно

$$\mu(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-t^{\alpha})^n E^n_{\beta,\alpha n+1}(-t^{\beta}), \qquad (16)$$

$$\mu(t) = 1 + 2t^{\alpha-\beta}\sum_{n=1}^{\infty}(-t^{\beta})^n E^n_{\alpha,\beta n+(\alpha-\beta)+1}(-t^{\alpha}). \qquad (17)$$

Типові закони релаксації при $\alpha > \beta$ та $\alpha < \beta$ показані на рис. 4а. У симетричному випадку, коли $p^{\pm}(\tau) = p(\tau) = -\frac{d}{d\tau}E_\alpha\left[-\frac{1}{2}(\tau/T)^\alpha\right]$ (тут для зручності введено час релаксації T), закон релаксації визначається за формулою $\mu(t) = E_\alpha[-(t/T)^\alpha]$. Дані релаксаційні режими є аномальними та характеризуються степеневою асиптотичною поведінкою при $\tau \to \infty$.

У *четвертому* підрозділі знайдено точні закони релаксації для дворівневих систем з густинами ймовірностей $p^{\pm}(\tau)$, що відповідають односторонній розподілам Леві. Зокрема, закон релаксації симетричних систем з $p(\tau) = l_\alpha(\tau) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-s^\alpha}\}$, де $\alpha \in (0,1)$, визначається рядом

$$\mu(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Phi_\alpha\left(n^{-1/\alpha}t\right) \qquad (18)$$

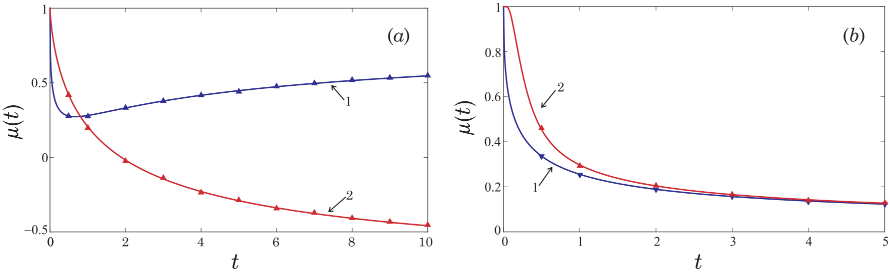

Рис. 4. Панель (a) – поведінка релаксаційних функцій для несиметричних систем з часами очікування, що задаються розподілами Міттаг-Леффлера при (1) $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.8$ *та* (2) $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.4$. *Панель (b) – релаксаційні функції для симетричних систем з часами очікування, що мають* (1) *розподіл Міттаг-Леффлера з параметрами* $\alpha = 0.5$ *і* $T = 0.25$, *та* (2) *розподіл Леві з параметром* $\alpha = 0.5$. *Суцільні лінії відповідають аналітичним формулам, а маркери – результатам числового моделювання.*

з функцією $\Phi_\alpha(t) = \int_0^t d\tau\, l_\alpha(\tau)$ (для порівняння з релаксацією Міттаг-Леффлера див. рис. 4b). Зауважимо, що при великих значеннях часу релаксація Леві також демонструє аномальну степеневу поведінку.

У *п'ятому* підрозділі отримано рівняння типу Монтролла-Вейсса для густини ймовірності $P(\Delta, t)$ випадкової величини $\Delta_t = \int_0^t dt' f(t')$, що дорівнює різниці часу перебування дихотомічного процесу $f(t)$ у "верхньому" та "нижньому" станах. У просторі Фур'є-Лапласа ($\Delta \xrightarrow{\mathcal{F}} k$, $t \xrightarrow{\mathcal{L}} s$) це рівняння можна подати у вигляді

$$P_{ks} = \frac{1 - p^{+}_{s-ik}}{s - ik} + \frac{p^{+}_{s-ik}}{1 - p^{+}_{s-ik} p^{-}_{s+ik}} \left(\frac{1 - p^{-}_{s+ik}}{s + ik} + \frac{1 - p^{+}_{s-ik}}{s - ik} p^{-}_{s+ik} \right). \qquad (19)$$

Слід зазначити, що випадкова величина Δ_t/t (часове середнє значення функції $f(t)$) може бути інтерпретована як середня намагніченість таких систем. Відмітимо також важливий зв'язок релаксаційної функції $\mu(t)$ з випадковою величиною Δ_t, а саме: релаксаційна функція дорівнює швидкості зміни середнього значення різниці часів перебування системи в дозволених станах, тобто $\mu(t) = \frac{d}{dt}\langle \Delta_t \rangle$. У цьому ж підрозділі знайдено точний розв'язок рівняння (19) у випадку експоненціальних густин $p^{\pm}(\tau)$, а також відповідні моменти першого та другого порядку для Δ_t.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі, використовуючи концепцію неперервних у часі випадкових блукань, вперше вивчено транспортні та релаксаційні властивості широкого кола стохастичних систем з надповільною еволюцією. Зокрема, на захист виносяться наступні основні наукові результати:

1. Вперше досліджено процес надповільних польотів Леві, що характеризуються важкими хвостами розподілу довжин стрибків випадкових

блукань та надважкими хвостами розподілу часів очікування між стрибками. Використовуючи рівняння Монтролла-Вейсса та тауберову теорему Карамати, знайдено всі можливі граничні густини ймовірності та відповідні їм масштабуючі функції часу, що визначають асимптотичну поведінку масштабованих надповільних польотів Леві. Проведено повну класифікацію граничних густин ймовірності та масштабуючих функцій в залежності від хвостових параметрів розподілів довжин стрибків та часів очікування між ними. Показано, що на відміну від масштабуючих функцій, вид яких залежить від хвостових параметрів обох розподілів, граничні густини визначаються лише хвостовими параметрами розподілу довжин стрибків і можуть мати або важкі хвости, або бути одно/двосторонніми експоненціальними функціями.

2. Знайдено представлення граничних густин ймовірності для масштабованих польотів Леві у вигляді (1) оберненого перетворення Фур'є, (2) оберненого перетворення Мелліна, (3) перетворення Лапласа, (4) H-функцій Фокса та (5) швидко збіжних степеневих рядів. За їх допомогою досліджено не тільки асимптотичну поведінку граничних густин ймовірності, але й показано, що в багатьох випадках граничні густини можуть бути виражені в термінах простих спеціальних функцій. Шляхом числового моделювання випадкових блукань, узагальненого на випадок статистичних розподілів з надважкими хвостами, підтверджено існування усіх типів граничних густин, передбачених теоретично.

3. Побудовано модель релаксаційних процесів у дворівневих системах, структурні елементи яких еволюціонують незалежно один від одного у відповідності з дихотомічним процесом. В рамках теорії неперервних у часі випадкових блукань отримано інтегральне рівняння, що описує релаксацію таких систем у загальному випадку довільних розподілів часів перебування їх структурних елементів у "верхньому" та "нижньому" станах. За допомогою цього рівняння вперше визначено асимптотичні закони релаксації при наявності важких та/або надважких хвостів зазначених розподілів. Показано, що в цих випадках релаксація відбувається за аномальними (повільними та надповільними) законами, які є універсальними для зазначених систем.

4. Знайдено точні закони релаксації дворівневих систем, для яких час перебування їх структурних елементів у "верхньому" та "нижньому" станах характеризується (1) експоненціальними розподілами, (2) розподілами Ерланга, (3) розподілами Міттаг-Леффлера та (4) односторонніми розподілами Леві. Встановлено, що у першому випадку відбувається дебаївська релаксація, у другому випадку релаксація має осцилюючий характер, а у третьому та четвертому випадках реалізуються аномально повільні режими релаксації. Усі закони релаксації дворівневих систем, як точні, так і асимптотичні, підтверджені шляхом числового моделювання.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати

1. Denisov S. I. Asymptotic solutions of decoupled continuous-time random walks with superheavy-tailed waiting time and heavy-tailed jump length distributions / S. I. Denisov, S. B. Yuste, **Yu. S. Bystrik**, H. Kantz, K. Lindenberg //Phys. Rev. E.–2011.–Vol. 84, no. 6.–P. 061143 (7 pp).
2. Denisov S. I. Limiting distributions of continuous-time random walks with superheavy-tailed waiting times / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik**, H. Kantz // Phys. Rev. E. – 2013. – Vol. 87, no. 2. – P. 022117 (13 pp).
3. **Быстрик Ю. С.** Численное исследование законов сверхмедленной диффузии для определенного класса непрерывных во времени случайных блужданий / **Ю. С. Быстрик** // J. Nano-Electron. Phys. – 2016. – Vol. 8, no. 1. – P. 01044 (5 pp).
4. Denisov S. I. Continuous-time random walk model of relaxation of two-state systems / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik** // Acta Phys. Pol. B. – 2015. – Vol. 46, no. 5. – P. 931 (17 pp).
5. **Быстрик Ю. С.** Аномальные релаксационные процессы в двухуровневых системах / **Ю. С. Быстрик**, Л. А. Денисова // J. Nano-Electron. Phys. – 2015. – Vol. 7, no. 3. – P. 03049 (9 pp).

2. Наукові праці апробаційного характеру

6. Denisov S. I. Asymptotic solutions of decoupled continuous-time random walks with superheavy-tailed waiting time and heavy-tailed jump length / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik**, H. Kantz // Proceedings of The 2nd Internetional Conference “Nanomaterials: Applications and Properties” (Alushta, 17-22 September 2012). – Sumy, 2012. – Vol. 1, no. 4. – P. 04MFPN17 (4pp).
7. Denisov S. I. Long-time behavior of the continuous-time random walk with a superheavy-tailed distribution of waiting times / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik**, H. Kantz // Proceedings of the 3rd International Conference “Quantum Electrodynamics and Statistical Physics” (Kharkov, August 29 – September 2, 2011). – Kharkov, 2011. – P. 135.
8. **Быстрик Ю. С.** Релаксационные процессы в дихотомических системах / **Ю. С. Быстрик**, С. И. Денисов // Збірник тез школи-семінару “Багатомасштабне моделювання фізичних процесів у конденсованих середовищах” (Суми, 21-22 жовтня 2014 р.). – Суми, 2014. – С. 23.
9. Denisov S. I. New asymptotic solutions of the unbiased continuous-time random walks / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik** // Збірник тез науково-практичної конференції “Фізика, електроніка, електротехніка – 2011” (Суми, 18-22 квітня 2011 р.). – Суми, 2011. – С. 31.

10. Denisov S. I. Long-time solutions of decoupled continuous-time random walks with asym-metric heavy-tailed jump length distributions / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik** // Збірник тез науково-практичної конференції "Фізика, електроніка, електротехніка – 2012" (Суми, 16-21 квітня 2012 р.). – Суми, 2012. – С. 30.
11. **Bystrik Yu. S.** Laws of anomalous superslow diffusion / **Yu. S. Bystrik**, S. I. Denisov // Збірник тез науково-практичної конференції "Фізика, електроніка, електротехніка – 2013" (Суми, 22-27 квітня 2013 р.). – Суми, 2013. – С. 53.
12. **Быстрик Ю. С.** Процессы релаксации в двухуровневых системах / **Ю. С. Быстрик**, С. И. Денисов // Збірник тез науково-практичної конференції "Фізика, електроніка, електротехніка – 2015" (Суми, 20-25 квітня 2015 р.). – Суми, 2015. – С. 73.
13. **Бистрик Ю. С.** Асимптотичні у часі густини ймовірності для надповільних польотів Леві / **Ю. С. Бистрик**, С. І. Денисов // Збірник тез науково-практичної конференції "Інформатики, математика, автоматика – 2019" (Суми, 23-26 квітня 2019 р.). – Суми, 2019. – С. 194.
14. **Bystrik Yu. S.** Stationary Kolmogorov-Feller equation: Exact solutions / **Yu. S. Bystrik**, S. I. Denisov // Збірник тез науково-практичної конференції "Інформатики, математика, автоматика – 2019" (Суми, 23-26 квітня 2019 р.). – Суми, 2019. – С. 192.

3. Наукові праці, які додатково відображають наукові результати

15. Denisov S.I. Statistics of bounded processes driven by Poisson white noise / S.I. Denisov, **Yu. S. Bystrik** // Phys. A. – 2019. – Vol. 515. – P. 38-46 (9 pp).
16. Denisov S.I. Exact stationary solutions of the Kolmogorov-Feller equation in a bounded domain / S.I. Denisov, **Yu.S. Bystrik** // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. – 2019. – Vol. 74. – P. 248-259 (12 pp).

АНОТАЦІЯ

Бистрик Ю.С. **Аномальні транспортні та релаксаційні процеси у стохастичних системах з надповільною еволюцією. – Рукопис.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика. – Сумський державний університет; Інститут прикладної фізики Національної академії наук України, Суми, 2019.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню аномальних транспортних властивостей стохастичних систем, які характеризуються статистикою Леві та надповільною еволюцією, а також вивченню аномальних релаксаційних процесів у дворівневих системах, властивості елементів яких змінюються відповідно до дихотомічного процесу.

Використовуючи рівняння Монтролла-Вейсса, отримано граничні густини ймовірності та відповідні їм масштабуючі функції, що задають асимптотичну у часі поведінку надповільних польотів Леві. Досліджено аномальні транспортні властивості таких стохастичних процесів. Встановлено, що масштабуючі функції належать до класу функцій, що повільно змінюються на нескінченності. Проведено повну класифікацію граничних густин ймовірності в залежності від параметрів розподілів довжин стрибків процесу і показано, що всі граничні густини належать або до класу функцій з важкими хвостами, або є експоненціальними функціями.

На основі теорії неперервних у часі випадкових блукань отримано інтегральне рівняння, що описує релаксацію в зазначених дворівневих системах, і знайдено ряд його точних розв'язків. У випадках, коли розподіли часів перебування системи в дозволених станах характеризуються важкими та/або надважкими хвостами, за допомогою цього рівняння визначено універсальні закони релаксації при великих значеннях часу.

Ключові слова: стохастичні процеси, аномальний транспорт, випадкові блукання, польоти Леві, аномальна релаксація, рівняння Монтролла-Вейсса, важкі/надважкі хвости.

АННОТАЦИЯ

***Быстрик Ю.С.* Аномальные транспортные и релаксационные процессы в стохастических системах со сверхмедленной эволюцией. – Рукопись.**

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика. – Сумский государственный университет; Институт прикладной физики Национальной академии наук Украины, Сумы, 2019.

Диссертационная работа посвящена исследованию аномальных транспортных свойств стохастических систем, которые характеризуются статистикой Леви и сверхмедленной эволюцией, а также изучению аномальных релаксационных процессов в двухуровневых системах, свойства элементов которых изменяются в соответствии с дихотомическим процессом.

Используя уравнение Монтролла-Вейсса, получены предельные плотности вероятности и соответствующие им масштабирующие функции, которые задают асимптотическое во времени поведение сверхмедленных полётов Леви. Исследованы аномальные транспортные свойства таких стохастических процессов. Установлено, что масштабирующие функции задаются параметрами распределений длин скачков процесса и времён ожидания между ними и принадлежат к классу функций, которые медленно меняются на бесконечности. В то же время предельные плотности вероятности задаются только параметрами распределений длин скачков процесса. Проведена полная классификация предельных плотностей в зависимости от этих параметров и показано, что они являются или функци-

ями с тяжёлыми хвостами, или экспоненциальными функциями.

На основе теории непрерывных во времени случайных блужданий получено интегральное уравнение, описывающее релаксацию в указанных двухуровневых системах, и найден ряд его точных решений. В случаях, когда распределения времён пребывания системы в допустимых состояниях характеризуются тяжёлыми и/или сверхтяжёлыми хвостами, с помощью этого уравнения найдены универсальные законы релаксации при больших временах. Показано, что такие релаксационные законы характеризуются степенным, модифицированным степенным или сверхмедленным поведением.

Ключевые слова: стохастические процессы, аномальный транспорт, случайные блуждания, полёты Леви, аномальная релаксация, уравнение Монтролла-Вейсса, тяжёлые/сверхтяжёлые хвосты.

SUMMARY

Bystrik Yu.S. **Anomalous transport and relaxation processes in stochastic systems with ultraslow evolution. – Manuscript.**

The thesis for the scientific degree of the candidate of physical and mathematical sciences by speciality 01.04.02 – theoretical physics. – Sumy State University; Institute of Applied Physics, National Academy of Sciences of Ukraine, Sumy, 2019.

The thesis is devoted to the investigation of the anomalous transport behavior of stochastic systems which are characterized by Lévy statistics and ultraslow evolution, and to the studying of the phenomenon of anomalous relaxation in two-state systems, properties of elements of which evolve according to the dichotomous process.

Using the Montroll-Weiss equation, limiting probability densities and corresponding scaling functions which describe the asymptotic in time behavior of ultraslow Lévy flights were determined. Anomalous transport properties of such processes were studied. It was indicated that scaling functions belong to the class of slowly varying functions. The total classification of limiting probability densities was carried out. It was shown that limiting probability densities are heavy-tailed or exponential functions and depend on parameters describing the behavior of jump-length distributions.

On the basis of the continuous-time random walk theory the integral equation which describes relaxation in pointed two-state systems was derived. It was obtained a number of results related to exact anomalous relaxation laws. Also universal anomalous relaxation laws were derived in the case of the long-time regime when distributions of waiting times in possible states of the system characterized by heavy and/or superheavy tails.

Keywords: stochastic processes, anomalous transport, random walks, Lévy flights, anomalous relaxation, Montroll-Weiss equation, heavy/superheavy tails.

Підписано до друку 30.10.2019 р.
Формат $60 \times 84/16$. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 0,9. Наклад 100 прим. Вид. № 39.

Віддруковано у ВВП "Мрія-1".
40000, Суми, вул. Кузнечна, 2.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
серія ДК № 6804 від 12.06.2019.