

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ ФІЗИКИ

Кваліфікаційна наукова робота
на правах рукопису

Бистрик Юрій Сергійович

УДК 531.19

ДИСЕРТАЦІЯ

АНОМАЛЬНІ ТРАНСПОРТНІ ТА РЕЛАКСАЦІЙНІ ПРОЦЕСИ У
СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМАХ З НАДПОВІЛЬНОЮ ЕВОЛЮЦІЄЮ

01.04.02 – теоретична фізика
Фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ Ю.С. Бистрик

Науковий керівник – Денисов Станіслав Іванович, доктор фізико-математичних наук, професор

Суми – 2019

АНОТАЦІЯ

Бистрик Ю.С. Аномальні транспортні та релаксаційні процеси у стохастичних системах з надповільною еволюцією. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика. – Сумський державний університет; Інститут прикладної фізики Національної академії наук України, Суми, 2019.

Дисертаційна робота присвячена дослідженю аномальних транспортних властивостей стохастичних систем, чия поведінка характеризується статистикою Леві та надповільною еволюцією, а також вивченю аномальних релаксаційних процесів у дворівневих системах, властивості структурних елементів яких змінюються відповідно до дихотомічного процесу.

У роботі представлено літературний огляд важливих результатів, що стосуються провідних досліджень аномальних транспортних та релаксаційних процесів у стохастичних системах. Зазначено основні характерні риси, які виділяють процеси з аномальною статистикою з-поміж інших випадкових процесів та наведено приклади фізичних явищ, що описуються згідно з концепцією процесів Леві. Обговорено деякі ключові методи опису систем з аномальною поведінкою та можливості їх застосування. Зокрема, здійснено огляд теорії неперервних у часі випадкових блукань, розглянуто використання рівняння Ланжевена для опису стрибкоподібних явищ, а також наведено основні засади методу субординатної системи рівнянь Ланжевена, що дозволяє побудувати зв'язок між підходом Ланжевена та неперервними у часі випадковими блуканнями. Зважаючи на проаналізовані результати, окреслено ряд відкритих завдань, вирішенню яких присвячена дисертаційна робота.

Проведено дослідження польотів Леві, для яких є характерними довжини стрибків випадкових блукань із важкими розподілами та часи очікування процесу в поточному положенні із надважкими розподілами. Стохастичний про-

цес описано в межах теорії неперервних у часі випадкових блукань, при цьому густина ймовірності значення даного процесу (положення блукаючої частинки) задовольняє рівняння Монтролла-Вейсса. Використавши дане рівняння та асимптотики розподілів довжин стрибків та часів очікування, знайдено асимптотичні у часі розв'язки для усіх можливих випадків досліджуваного процесу. Отримані розв'язки являють собою граничні (у часі) густини ймовірності спеціальним чином масштабованого положення частинки, які мають вигляд оберненого перетворення Фур'є та явно не залежать від часу. Показано, що ці граничні густини ймовірності задаються тільки параметрами розподілів довжин стрибків частинки, а відповідні масштабуючі функції також і розподілами часів очікування. В залежності від параметрів розподілів довжин стрибків, граничні густини ймовірності будуть суттєво відрізнятися і являти собою одно- або двосторонні розподіли з гілками, які мають важкі хвости або являються виключно експоненціальними функціями. Водночас одержані масштабуючі функції буде віднесене до класу функцій, які повільно змінюються на нескінченості. Таким чином, досліджувані польоти Леві завжди будуть демонструвати надповільну еволюцію.

У роботі здійснено всебічний аналіз граничних густин ймовірності масштабованого положення частинки. Із огляду на представлення граничних густин у вигляді перетворення Фур'є, отримано їх запис у формі оберненого перетворення Мелліна та споріднених з ним H -функцій Фокса, які відіграють важливу роль в описанні аномальних процесів. Окрім цього, граничні розподіли отримано у вигляді степеневих рядів, що є зручними для практичних розрахунків, а також у формі перетворення Лапласа. Останнє представлення дозволяє отримати повний асимптотичний розклад граничних густин ймовірності, а також показує, що граничні розподіли є нормованими на одиницю, невід'ємними та унімодальними функціями. Одержано альтернативне знаходження граничних густин ймовірності, яке базується не на прямому використанні рівняння Монтролла-Вейсса, а має зв'язок з узагальненими центральними граничними теоремами. До того ж наведено зв'язок досліджуваного процесу із системою

субординаційних рівнянь Ланжевена. Знайдено уточнення до асимптотичної поведінки розподілів оригінального (немасштабованого) положення частинки, завдяки чому вдається коректно описати їх хвости у випадках, якщо граничні густини ймовірності є експоненціальними. На додаток розроблено метод комп’ютерного моделювання для розрахунку граничних густин ймовірності. Цей метод, пов’язаний із статистикою масштабованого положення частинки за умови великих значень часу, дозволив чисельно розрахувати значення граничних розподілів у всіх розглянутих випадках. Як наслідок, показано, що результати числового моделювання знаходяться у дуже добрій відповідності із аналітичними передбаченнями.

На основі теорії неперервних у часі випадкових блукань вивчено процес релаксації для широкого класу дворівневих систем, структурні елементи яких є незалежними один від одного, а їх властивості змінюються згідно з дихотомічним процесом. Отримано інтегральне рівняння для законів релаксації у випадку довільних густин ймовірності часів очікування системи в “верхньому” та “нижньому” положенні. Дане рівняння показує, що у загальному випадку для дворівневих систем процес релаксації є нелокальним та проявляє ефекти пам’яті. За умови, що густини ймовірності часу перебування системи в “верхньому” і “нижньому” положеннях мають важкі та/або надважкі хвости, використовуючи перетворення Лапласа і тауберову теорему Карамати, знайдено поведінку законів релаксації при великих значеннях часу. Із дослідження випливає, що відповідні релаксаційні процеси демонструватимуть різноманітні аномальні режими, яким властива повільна або надповільна поведінка. Крім того, вказано дробові релаксаційні рівняння, для яких отримані степеневі релаксаційні функції є розв’язками при великих значеннях часу.

З-поміж іншого, увагу зосереджено на досліджені точних результатів щодо релаксаційних процесів у дворівневих системах. Такі результати важливі можливістю аналітичного аналізу поведінки досліджуваних процесів не лише з огляду на асимптотичний режим, а й за умови будь-яких значень часу. Крім того, вони дозволяють перевіряти коректність отриманих асимптотичних розв’яз-

ків та використаних апроксимаційних числових схем. Знаходження точних релаксаційних законів здійснено для випадків, коли часи очікування системи в рівноважних положеннях розподілені згідно з експоненціальними густинами ймовірності, а також мають важливі в теорії стохастичних процесів розподіли Ерланга, Міттаг-Леффлера та Леві. Показано, що відповідні розподіли можуть описувати дебаєвську релаксацію, аномальну релаксацію із складним осцилюючим характером чи типовою для процесів Леві степеневою поведінкою. Одержано рівняння типу Монтролла-Вейсса для густини ймовірності різниці часу перебування процесу в “верхньому” та “нижньому” положеннях. Знайдено точні розв'язки цього рівняння і моменти першого та другого порядку для випадку, якщо дихотомічний процес є узагальненим телеграфним процесом. На додаток проведено числові розрахунки (комп'ютерне моделювання та розв'язок відповідних інтегральних рівнянь), які цілком відповідають усім аналітично знайденим результатам.

Ключові слова: стохастичні процеси, аномальний транспорт, випадкові блукання, польоти Леві, аномальна релаксація, рівняння Монтролла-Вейсса, важкі/надважкі хвости.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

- Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати**
 - Denisov S. I. Asymptotic solutions of decoupled continuous-time random walks with superheavy-tailed waiting time and heavy-tailed jump length distributions / S. I. Denisov, S. B. Yuste, **Yu. S. Bystrik**, H. Kantz, K. Lindenberg // Phys. Rev. E. – 2011. – Vol. 84, no. 6. – P. 061143 (7 pp).
 - Denisov S. I. Limiting distributions of continuous-time random walks with superheavy-tailed waiting times / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik**, H. Kantz // Phys. Rev. E. – 2013. – Vol. 87, no. 2. – P. 022117 (13 pp).
 - Быстrik Ю. С.** Численное исследование законов сверхмедленной диффузии для определенного класса непрерывных во времени случайных блужда-

ний / Ю. С. Быстрик // J. Nano-Electron. Phys. – 2016. – Vol. 8, no. 1. – P. 01044 (5 pp).

4. Denisov S. I. Continuous-time random walk model of relaxation of two-state systems / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik** // Acta Phys. Pol. B. – 2015. – Vol. 46, no. 5. – P. 931 (17 pp).
5. **Быстрик Ю. С.** Аномальные релаксационные процессы в двухуровневых системах / **Ю. С. Быстрик**, Л. А. Денисова // J. Nano-Electron. Phys. – 2015. – Vol. 7, no. 3. – P. 03049 (9 pp).

2. Наукові праці апробаційного характеру

6. Denisov S. I. Asymptotic solutions of decoupled continuous-time random walks with superheavy-tailed waiting time and heavy-tailed jump length / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik**, H. Kantz // Proceedings of The 2nd International Conference “Nanomaterials: Applications and Properties” (Alushta, 17-22 September 2012). – Sumy, 2012. – Vol. 1, no. 4. – P. 04MFPN17 (4pp).
7. Denisov S. I. Long-time behavior of the continuous-time random walk with a superheavy-tailed distribution of waiting times / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik**, H. Kantz // Proceedings of the 3rd International Conference “Quantum Electrodynamics and Statistical Physics” (Kharkov, August 29 – September 2, 2011). – Kharkov, 2011. – P. 135.
8. **Быстрик Ю. С.** Релаксационные процессы в дихотомических системах / **Ю. С. Быстрик**, С. И. Денисов // Збірник тез школи-семінару “Багатомасштабне моделювання фізичних процесів у конденсованих середовищах” (Суми, 21-22 жовтня 2014 р.). – Суми, 2014. – С. 23.
9. Denisov S. I. New asymptotic solutions of the unbiased continuous-time random walks / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik** // Збірник тез науково-практичної конференції “Фізика, електроніка, електротехніка – 2011” (Суми, 18-22 квітня 2011 р.). – Суми, 2011. – С. 31.
10. Denisov S. I. Long-time solutions of decoupled continuous-time random walks with asym-metric heavy-tailed jump length distributions / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik** // Збірник тез науково-практичної конференції “Фізика,

електроніка, електротехніка – 2012” (Суми, 16-21 квітня 2012 р.). – Суми, 2012. – С. 30.

11. **Bystriк Yu. S.** Laws of anomalous superslow diffusion / **Yu. S. Bystriк**, S. I. Denisov // Збірник тез науково-практичної конференції “Фізика, електроніка, електротехніка – 2013” (Суми, 22-27 квітня 2013 р.). – Суми, 2013. – С. 53.
12. **Быстрик Ю. С.** Процессы релаксации в двухуровневых системах / **Ю. С. Быстрик**, С. И. Денисов // Збірник тез науково-практичної конференції “Фізика, електроніка, електротехніка – 2015” (Суми, 20-25 квітня 2015 р.). – Суми, 2015. – С. 73.
13. **Бистрик Ю. С.** Асимптотичні у часі густини ймовірності для надповільних польотів Леві / **Ю. С. Бистрик**, С. І. Денисов // Збірник тез науково-практичної конференції “Інформатики, математика, автоматика – 2019” (Суми, 23-26 квітня 2019 р.). – Суми, 2019. – С. 194.
14. **Bystriк Yu. S.** Stationary Kolmogorov-Feller equation: Exact solutions / **Yu. S. Bystriк**, S. I. Denisov // Збірник тез науково-практичної конференції “Інформатики, математика, автоматика – 2019” (Суми, 23-26 квітня 2019 р.). – Суми, 2019. – С. 192.

3. Наукові праці, які додатково відображають наукові результати

15. Denisov S. I. Statistics of bounded processes driven by Poisson white noise / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystriк** // Phys. A. – 2019. – Vol. 515. – P. 38-46 (9 pp).
16. Denisov S. I. Exact stationary solutions of the Kolmogorov-Feller equation in a bounded domain / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystriк** // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. – 2019. – Vol. 74. – P. 248-259 (12 pp).

SUMMARY

Bystrik Yu.S. Anomalous transport and relaxation processes in stochastic systems with ultraslow evolution. – Manuscript.

The thesis for the scientific degree of the candidate of physical and mathematical sciences by speciality 01.04.02 – theoretical physics. – Sumy State University; Institute of Applied Physics, National Academy of Sciences of Ukraine, Sumy, 2019.

The thesis is devoted to the investigation of the evolution of transport processes which allows to describe the behavior of ultraslow Lévy flights, and to the studying of the phenomenon of anomalous relaxation of two-state systems whose elements evolve according to the dichotomous process.

The literature reviews of present outcomes which relate to the study of anomalous transport and relaxation processes in stochastic systems were presented in the thesis. The main features which highlight processes which contain Lévy statistics among other random processes were indicated as well as examples of physical phenomena which were described on the basis of Lévy processes. Some key methods of the anomalous processes description were considered and possibilities of their application were analyzed. Particularly, an overview of the theory of the continuous-time random walk was made. Furthermore, the application of the Langevin equation for description of the jump-like phenomena was considered, as well as an overview of the method of the subordinated Langevin equations, which allows making a link between the Langevin method and continuous-time random walk. Therefore, series of open tasks for the thesis were outlined on the basis of the analysis of the studied literature.

Lévy flights for which the lengths of the jumps of random walks and waiting times in a current position distributed with arbitrary heavy- and superheavy-tailed probability densities, respectively, were revealed in the thesis. The stochastic process was described within the continuous-time random walk theory and the probability density of the value of this process (the position of the wandering particle) satisfies the Montroll-Weiss equation. The asymptotic in time solutions for all potential

cases of the process under study were found using appropriate the Montroll-Weiss equation as well as the asymptotic of jump length and waiting times distributions. The asymptotic solutions are the limiting (in time) probability densities of a particle position which was scaled in a special way and was presented as an inverse Fourier transform. It is shown that these limiting probability densities were set only by the parameters of the particle jump distribution. However, the corresponding scaling functions were set also by the distributions of the waiting times. Depending on the parameters of the lengths distribution of the particle's jumps, the limiting probability densities will differ significantly. Thus, they will be one-or two-sided distributions with heavy-tailed branches or the ones that are purely exponential functions. The scaling functions which were found for this process related to a class of slowly varying functions. Therefore, the Lévy flights under study will always manifest extremely slow evolution.

In the work a comprehensive analysis of the limiting probability densities of the scaling particle position were carried out. On the basis of the representation of the limiting probability densities in the form of Fourier transform, they were expressed in terms of the inverse Mellin transform was obtained and related Fox H -functions as well which play an important role in description of anomalous processes. The representations of the limiting probability densities as a power series and in the form of the Laplace transform were obtained. This is convenient for the calculation at small values of the variable and allows obtaining a complete asymptotic expansion of the limiting probability density. As well as to show that the limiting probability densities are the non-negative unimodal functions which are also properly normalized. An alternative finding of limiting probability densities which does not based on the direct application of the Montroll-Weiss equation was obtained. This finding is linked to the generalized central limiting theorem. Also the connection between the process under study and the system of subordinated Langevin equation was demonstrated here. Moreover, the refinement of the asymptotic behavior of the distributions of the original particle position was found. The tails of these distributions are described properly by this refinement in cases if the limiting probability densi-

ties have exponential branches. A numerical simulation method was developed to calculate the limiting probability densities. This method is linked to the statistics of the scaled particle position at high value of time and allowed numerically to calculate the value of the limiting probability densities in all necessary cases. It is shown that the results of numerical simulation are perfectly in the line with the analytical predictions.

The further investigations of the thesis is dedicated to the study of the relaxation process for a broad class of two-level systems whose structural elements change in compliance with the dichotomous process. This relaxation process was studied with the use of the theory of the continuous-time random walk. An integral equation for the law of relaxation was obtained in the event of arbitrary probability densities of waiting time in the “upper” and “lower” positions from which it appeared that in the general case of two-level systems the relaxation process is not local and it manifests memory effects. If probability density has heavy or superheavy tails being in the “upper” and “lower” positions the Laplace transform and Karamata’s Tauberian theorem was used to find the law of relaxation’s behavior. Consequently, the behavior of the relaxation laws under study in the conditions of large time values was found and it showed that corresponding relaxation processes will be anomalous and demonstrating a versatile slow and ultraslow behavior. In addition, at long times the fractional relaxation equations were pointed for the class of the power-law relaxation functions.

The part of the thesis is focused on obtaining exact results concerning relaxation processes in two-state systems. The importance of these results is that they allow analytically studying the behavior of the processes under consideration not only in an asymptotic mode but at any value of time. Also they permit to check the correctness of obtained asymptotic solutions and used approximate numerical schemes. Finding exact relaxation laws was carried out for cases where the waiting times of the system at the “upper” and “lower” positions are distributed according to the exponential probability densities and also important in the theory of stochastic processes Erlang, Mittag-Leffler and Lévy distributions. It is shown that the Debye

relaxation can be described by corresponding distributions as well as anomalous relaxation with a complex oscillating behavior or typical for Lévy processes relaxation with a power-law decay. Among other things, an equation of the Montroll-Weiss type was obtained for the probability density of the difference of the process time in the upper and lower positions. Exact solutions of the equation were obtained as well as the moments of the first and second order for the probability density if the cases of exponential distribution of waiting times are symmetrical and asymmetrical were found. Furthermore, numerical calculations (numerical simulation and the solution of the corresponding integral equations) which are in full compliance with all analytically obtained results were carried out.

Key words: stochastic processes, anomalous transport, random walks, Lévy flights, anomalous relaxation, Montroll-Weiss equation, heavy/superheavy tails.

The publication list of the applicant of the thesis

1. Denisov S. I. Asymptotic solutions of decoupled continuous-time random walks with superheavy-tailed waiting time and heavy-tailed jump length distributions / S. I. Denisov, S. B. Yuste, **Yu. S. Bystrik**, H. Kantz, K. Lindenberg // Phys. Rev. E. – 2011. – Vol. 84, no. 6. – P. 061143 (7 pp).
2. Denisov S. I. Limiting distributions of continuous-time random walks with superheavy-tailed waiting times / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik**, H. Kantz // Phys. Rev. E. – 2013. – Vol. 87, no. 2. – P. 022117 (13 pp).
3. Bystrik Yu. S. A numerical investigation of laws of superslow diffusion for a certain class of continuous-time random walks / **Yu. S. Bystrik** // J. Nano-Electron. Phys. – 2016. – Vol. 8, no. 1. – P. 01044 (5 pp) (in Russian).
4. Denisov S. I. Continuous-time random walk model of relaxation of two-state systems / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik** // Acta Phys. Pol. B. – 2015. – Vol. 46, no. 5. – P. 931 (17 pp).

5. Bystrik Yu. S. Anomalous relaxation processes in two-state systems / **Yu. S. Bystrik**, L. A. Denisova // J. Nano-Electron. Phys. – 2015. – Vol. 7, no. 3. – P. 03049 (9 pp) (in Russian).

2. The scientific works of an approbatory character

6. Denisov S. I. Asymptotic solutions of decoupled continuous-time random walks with superheavy-tailed waiting time and heavy-tailed jump length / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik**, H. Kantz // Proceedings of The 2nd International Conference “Nanomaterials: Applications and Properties” (Alushta, 17-22 September 2012). – Sumy, 2012. – Vol. 1, no. 4. – P. 04MFPN17 (4pp).
7. Denisov S. I. Long-time behavior of the continuous-time random walk with a superheavy-tailed distribution of waiting times / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik**, H. Kantz // Proceedings of the 3rd International Conference “Quantum Electrodynamics and Statistical Physics” (Kharkov, August 29 – September 2, 2011). – Kharkov, 2011. – P. 135.
8. **Bystrik Yu. S.** Relaxation processes in dichotomous systems / **Yu. S. Bystrik**, S. I. Denisov // Proceedings of the Workshop “Large-scale modelling of physical processes in condensed media” (Sumy, 21-22 October 2014). – Sumy, 2014. – P. 23 (in Russian).
9. Denisov S. I. New asymptotic solutions of the unbiased continuous-time random walks / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik** // Proceedings of the Scientific-Practical Conference “Physics, electronics, electrical engineering – 2011” (Sumy, 18-22 April 2011). – Sumy, 2011. – P. 31.
10. Denisov S. I. Long-time solutions of decoupled continuous-time random walks with asym-metric heavy-tailed jump length distributions / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik** // Proceedings of the Scientific-Practical Conference “Physics, electronics, electrical engineering – 2012” (Sumy, 16-21 April 2012). – Sumy, 2012. – P. 30.
11. **Bystrik Yu. S.** Laws of anomalous superslow diffusion / **Yu. S. Bystrik**, S. I. Denisov // Proceedings of the Scientific-Practical Conference “Physics,

electronics, electrical engineering – 2013” (Sumy, 22-27 April 2013). – Sumy, 2013. – P. 53.

12. **Bystriк Yu. S.** Relaxation processes in two-state systems / **Yu. S. Bystriк**, S. I. Denisov // Proceedings of the Scientific-Practical Conference “Physics, electronics, electrical engineering – 2015” (Sumy, 20-25 April 2015). – Sumy, 2015. – P. 73 (in Russian).
13. **Bystriк Yu. S.** Asymptotic (in time) probability densities for ultraslow Lévy flights / **Yu. S. Bystriк**, S. I. Denisov // Proceedings of the Scientific-Practical Conference “Informatics, mathematics, automation – 2019” (Sumy, 23-26 April 2019). – Sumy, 2019. – P. 194 (in Ukrainian).
14. **Bystriк Yu. S.** Stationary Kolmogorov-Feller equation: Exact solutions / **Yu. S. Bystriк**, S. I. Denisov // Proceedings of the Scientific-Practical Conference “Informatics, mathematics, automation – 2019” (Sumy, 23-26 April 2019). – Sumy, 2019. – P. 192.

3. The scientific works which additionally reflect scientific results

15. Denisov S. I. Statistics of bounded processes driven by Poisson white noise / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystriк** // Phys. A. – 2019. – Vol. 515. – P. 38-46 (9 pp).
16. Denisov S. I. Exact stationary solutions of the Kolmogorov-Feller equation in a bounded domain / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystriк** // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. – 2019. – Vol. 74. – P. 248-259 (12 pp).

ЗМІСТ

ВСТУП	18
РОЗДІЛ 1. АНОМАЛЬНІ СТОХАСТИЧНІ ПРОЦЕСИ ТА МЕТОДИ ЇХ ОПИСУ	25
1.1. Аномальні транспортні та релаксаційні закони	27
1.2. Процеси Леві	40
1.3. Методи опису аномальних процесів	43
1.3.1. Неперервні у часі випадкові блукання	43
1.3.2. Рівняння Ланжевена	49
Висновки до розділу 1	55
РОЗДІЛ 2. АСИМПТОТИЧНІ У ЧАСІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЛЯ НАДПОВІЛЬ- НИХ ПОЛЬОТІВ ЛЕВІ	56
2.1. Опис моделі надповільних польотів Леві	57
2.2. Границі густини ймовірності у вигляді оберненого перетворення Фур'є та відповідні їм масштабуючі функції	62
2.2.1. Залежність отриманих розв'язків від параметрів розподілів довжин стрибків	64
2.3. Транспортні властивості надповільних польотів Леві	72
Висновки до розділу 2	76
РОЗДІЛ 3. ДОСЛІДЖЕННЯ ОСНОВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГРАНИЧ- НИХ ГУСТИН ЙМОВІРНОСТІ	77
3.1. Альтернативні представлення граничних розподілів	77
3.1.1. Представлення у вигляді оберненого перетворення Мелліна	77
3.1.2. Представлення у вигляді перетворення Лапласа	82

3.1.3. Представлення у вигляді H -функцій Фокса	88
3.1.4. Представлення у вигляді степеневого ряду	91
3.2. Поведінка граничних розподілів при малих та великих значеннях масштабованої змінної	94
3.3. Асимптотична поведінка густин ймовірності оригінального положення випадкових блукань у режимі рідкісних флюктуацій	97
3.4. Знаходження асимптотичних у часі розв'язків для надповільних польотів Леві з використанням центральної граничної теореми	106
3.5. Рівняння Ланжевена для CTRW-процесу	110
3.6. Дробове рівняння для граничних густин ймовірності	114
3.7. Числове моделювання досліджуваних блукань	115
3.7.1. Алгоритм числового моделювання	115
3.7.2. Приклади числового моделювання поведінки граничних густин ймовірності	118
Висновки до розділу 3	122
РОЗДІЛ 4. РЕЖИМИ РЕЛАКСАЦІЇ У ДВОРІВНЕВИХ СИСТЕМАХ	123
4.1. Опис релаксаційної моделі та основні рівняння	124
4.1.1. Виведення релаксаційного рівняння	125
4.2. Асимптотична поведінка законів релаксації	131
4.2.1. Важкі хвости розподілів часів очікування	131
4.2.2. Надважкі хвости розподілів часів очікування	139
4.2.3. Дробове рівняння для недебасівської релаксації	148
Висновки до розділу 4	155
РОЗДІЛ 5. ТОЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДЛЯ РЕЛАКСАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У ДВОРІВНЕВИХ СИСТЕМАХ	156
5.1. Експоненціальна релаксація	156

5.2. Релаксація Ерланга	158
5.3. Релаксація Мітtag-Леффлера.....	163
5.4. Релаксація Леві	168
5.5. Густота ймовірності для різниці часів перебування дворівневої системи в дозволених станах	170
5.5.1. Узагальнений телеграфний процес	173
Висновки до розділу 5	179
ОСНОВНІ ВИСНОВКИ	180
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	182
ДОДАТОК А	214
ДОДАТОК Б	218
ДОДАТОК В	222
ДОДАТОК Г	225
ДОДАТОК Д	232
ДОДАТОК Е	235
ДОДАТОК Ж	238

ВСТУП

Актуальність теми. Результати дослідження статистичних, динамічних та структурних особливостей складних систем показують, що багатьом природним явищам притаманна повільна недебайська релаксація та аномальні дифузійні властивості. Теоретично та експериментально доведено, що режими, які проявляють зазначену поведінку, грають ключову роль у різноманітних процесах, які спостерігаються у таких матеріалах, як скло, рідкі кристали, колоїдні розчини, полімери, протеїни і, навіть, у цілих біологічних організмах та екосистемах. Через значне розповсюдження систем із аномальними властивостями важливою проблемою є розвинення методів їх опису та аналізу. Численні результати показують, що особливо ефективним для цих цілей є формалізм неперервних у часі випадкових блукань (continuous time random walks). Основою цього підходу є ідея про те, що розглядуваний стохастичний процес характеризується певними випадковими величинами, які відповідають за час між двома послідовними переходами системи із одного стану в інший та величиною (мірою) даного переходу. Простота цієї ідеї разом із потужністю та гнучкістю у застосуванні дає можливість ефективно описувати процеси, які на значних часових масштабах мають негауссову статистику.

Найбільш розповсюджені аномальні дифузійні явища характеризуються нелінійним у часі степеневим ростом дисперсії процесу. Однак дисперсія може бути нескінченною, і тоді доцільно говорити не про дифузійні процеси, а про процеси переносу (транспортні процеси). Наприклад, це спостерігається у випадку польотів Леві (Lévy flights), для яких дисперсія кожного стрибка частинки, а тому і її результуючого положення, є нескінченною. Встановлено, що польоти Леві описують такі явища, як індуковані спалахами світла чи імпульсами напруги транзитні токи в аморфних середовищах, розповсюдження фотонів в атмосфері та склі Леві, міграцію тварин, рух бактерій, обмін речовин всередині живих клітин, сейсмічну активність, а також моделюють інші явища фізичної, біологічної та фінансової природи. Водночас аномальні недебай-

євські релаксаційні залежності в тілах зі складною структурою часто виражені більш повільним, ніж експоненціальним, законом Кольрауша-Уільямса-Уоттса (уповільненою експоненціальною функцією), а у деяких випадках взагалі степеневим спаданням релаксаційної функції. Так, недебаєвські режими релаксації спостерігаються в невпорядкованих середовищах, діелектриках, колоїдних системах, аморфних тілах, поліанілінових плівках, надохолоджених рідинах, білкових амінокислотах тощо.

Існує клас надповільних аномальних процесів, для яких еволюція системи відбувається навіть повільніше, ніж степеневим чином. Найчастіше масштабні властивості таких процесів характеризуються логарифмічним зростанням дисперсії (якщо вона існує) та оберненим логарифмічним спаданням релаксаційної функції. Проте надповільні процеси не обмежуються лише подібною поведінкою. Зокрема, в рамках підходу неперервних у часі випадкових блукань описано модель надповільної дифузії, яка узагальнює відомі до цього часу закони дифузії такого типу. Актуальним завданням є побудова теоретичних моделей та подальший розвиток методів вивчення надповільних транспортних та релаксаційних процесів, чия поведінка виходить за рамки дифузійної (навіть аномального типу) та типової релаксаційної. Такі дослідження розширяють відомі знання про клас аномальних процесів та в подальшому можуть бути використані для аналізу фізичних систем з відповідною поведінкою.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі електроніки, загальної та прикладної фізики Сумського державного університету. Результати роботи отримано під час виконання держбюджетних науково-дослідних робіт: “Вимушена та спонтанна магнітна динаміка систем одноосних наночастинок”, за підтримки МОН (№ 010U001379, 2011 р.); “Аномальні дифузійні та релаксаційні властивості класичних та квантових блукань з неперервним часом”, за підтримки МОН (№ 0112U001383, 2012 – 2014 pp.); “Магнітні, теплові та транспортні властивості періодично збуджених систем феромагнітних наночастинок”, за підтримки МОН (№ 0116U002622, 2016 – 2018 pp.); “Спрямований транспорт та дисипа-

ція енергії в системах феромагнітних наночастинок і магнітних скірміонів”, за підтримки МОН (№ 0119U100772, 2019 р.).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є послідовне теоретичне дослідження еволюції надповільних польотів Леві та аномальних релаксаційних процесів у дворівневих системах за допомогою методу неперервних у часі випадкових блукань.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання:

- узагальнити метод неперервних у часі випадкових блукань на випадок важких хвостів розподілу довжин стрибків процесу та надважких хвостів розподілу часів очікування між ними;
- знайти всі можливі граничні густини ймовірності та відповідні їм масштабуючі функції часу, що визначають асимптотичну поведінку надповільних польотів Леві;
- провести класифікацію граничних густин ймовірності та масштабуючих функцій в залежності від параметрів розподілів довжин стрибків та часів очікування між ними;
- знайти альтернативні представлення граничних густин ймовірності, з їх допомогою детально проаналізувати властивості цих густин, та порівняти аналітичні результати з результатами чисельного моделювання;
- в рамках моделі неперервних у часі випадкових блукань отримати рівняння релаксації для дворівневих систем, структурні елементи яких є незалежними і еволюціонують у відповідності з дихотомічним процесом;
- визначити всі можливі асимптотичні закони релаксації у дворівневих системах для випадків, коли розподіли часів перебування дихотомічного процесу у двох своїх станах мають важкі та/або надважкі хвости;
- знайти точні розв’язки релаксаційного рівняння та порівняти їх, а також асимптотичні закони релаксації, з отриманими шляхом чисельного моделювання результатами.

Об’єкт дослідження. Процеси еволюції в нерівноважних системах, параметри стану яких описуються повільними та надповільними випадковими блукан-

нями з неперервним часом.

Предмет дослідження. Транспортні та релаксаційні властивості стохастичних систем із аномально повільною поведінкою.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі проведено дослідження аномально повільних транспортних та релаксаційних процесів на основі методів статистичної та математичної фізики, теорії стохастичних систем, методів числового моделювання. Зокрема, густини ймовірності для надповільних польотів Леві знаходилася із використанням теорії неперервних у часі випадкових блукань, теорії ймовірностей та теорії рівняння Ланжевена. Відповідні граничні розподіли та масштабуючі функції знаходилися за допомогою підходів, що базуються на методах інтегральних перетворень, асимптотичного аналізу та тауберової теорії. Для вивчення властивостей отриманих граничних розподілів використовувалися знання із теорії спеціальних функцій та теорії функцій комплексної змінної. При отриманні релаксаційних рівнянь для дворівневих систем використовувалися підходи теорії неперервних у часі випадкових блукань, теорії ймовірностей та операційного числення. Дослідження роз'язків релаксаційного рівняння проводилося, виходячи із методів асимптотичного аналізу, тауберової теорії, а також комплексного інтегрування. Числове моделювання здійснювалося на основі методу Монте-Карло із використанням методів генерування випадкових величин із заданими розподілами, а чисельний розв'язок інтегральних рівнянь базувався на методі квадратур.

Наукова новизна одержаних результатів:

- Вперше запропоновано теорію надповільних польотів Леві, що базується на неперервних у часі випадкових блуканнях, для яких розподіли часів очікування між послідовними стрибками характеризуються надважкими хвостами, а розподіли довжин стрибків – важкими хвостами.
- Вперше знайдено всі граничні густини ймовірності для надповільних польотів Леві та проведено їх повну класифікацію в залежності від параметрів розподілів довжин стрибків та часів очікування між ними.
- Визначено різні форми представлення граничних густин ймовірності для

надповільних польотів Леві, що використовують інтегральні перетворення, H -функції Фокса та швидко збіжні степеневі ряди, за допомогою яких вперше проведено детальний аналіз поведінки цих густин, а в окремих випадках знайдено їх явні вирази в термінах простих спеціальних функцій.

- В рамках теорії неперервних у часі випадкових блукань вперше побудовано модель релаксаційних процесів у дворівневих системах, структурні елементи яких незалежні і змінюються згідно з дихотомічним процесом, розподіли часів перебування якого у “верхньому” та “нижньому” станах характеризуються важкими та/або надважкими хвостами.

- Вперше знайдено всі асимптотичні закони релаксації для дворівневих систем з важкими та/або надважкими хвостами зазначених розподілів, проведено їх класифікацію, а в окремих випадках отримано точні закони релаксації.

Практичне значення одержаних результатів. Одержані у дисертації результати поглинюють фундаментальні уявлення про статистичні властивості систем із аномально повільною поведінкою та розвивають методи їх опису. Зокрема, в роботі досліджено транспортні властивості надповільних польотів Леві, для яких є характерними довгі стрибкоподібні переходи між станами, а їх еволюція – набагато повільніша за степеневу. Крім того, детально розглянуто перебіг релаксаційних процесів у дворівневих системах, що змінюються згідно з дихотомічним процесом. Такі дворівневі системи апроксимують велику кількість більш складних систем і особливо зручні для їх аналізу у разі повільної степеневої та надповільної поведінки їх структурних елементів. Як наслідок, коло досліджених аномальних транспортних та релаксаційних процесів розширилося до класу тих, що проявляють надповільну еволюцію.

Результати роботи можуть бути використані при моделюванні та прогнозуванні поведінки широкого кола систем, в тому числі магнітних, із аномальною еволюцією, а також при обробці відповідної статистичної інформації. В окремих випадках отримані результати описують залежності, що спостерігаються для аномально повільних релаксаційних процесів, пов’язаних з ущільненням гранульованих матеріалів та адсорбцією-десорбцією речовин поверхнями субстра-

тів. До того ж отримані результати можуть бути використані при дослідженні особливостей руху вакансій у неоднорідних середовищах, захопленні об'єктів дислокаціями і т.д.

Особистий внесок дисертанта полягає у пошуку та аналізі літературних джерел, а також проведенні наукового дослідження за темою дисертації. Результати дисертації базуються на дослідженнях, здійснених як у співпраці з науковим керівником – д-р. фіз.-мат. наук, професором С. І. Денисовим, так і особисто автором. Постановка мети дисертаційної роботи, наукових завдань, методів їх вирішення та аналізу, а також обговорення отриманих результатів проводилася разом із науковим керівником. Здобувач брав участь на всіх етапах наукового дослідження: у проведенні аналітичних розрахунків та числового моделювання, аналізі одержаних результатів, оформленні та публікації наукових праць.

У роботі [1] автор приймав участь у аналітичному знаходженні граничних густин ймовірності для симетричних надповільних польотів Леві та їх представленні у вигляді спеціальних функцій.

У роботі [2] автор брав участь у аналітичному та числовому знаходженні асимптотичних розв'язків рівняння Монтролла-Вейсса для несиметричних надповільних польотів Леві, аналізі граничних густин ймовірності та отриманні їх альтернативних представлень.

У роботах [3, 4], використовуючи модель неперервних у часі випадкових блукань з надважкими хвостами розподілів часів очікування процесу між стрибками, автором запропоновано алгоритм та проведено детальне числове дослідження надповільних польотів Леві та надповільних дифузійних процесів.

У роботі [5] автор брав участь у виведенні релаксаційного рівняння для симетричної дворівневої системи, аналітичному отриманні асимптотичних співвідношень для аномальних законів релаксації та у числовому дослідженні розглядуваних процесів.

У роботі [6] автором дисертації знайдено релаксаційне рівняння для несиметричної моделі дворівневої системи, а також його асимптотичні розв'язки у разі

повільної та надповільної релаксації. Крім того, проведено числовий роз'язок інтегральних релаксаційних рівнянь та числове моделювання досліджуваного процесу.

У роботах [7, 8] автор приймав участь у аналітичному та числовому знаходженні точних розподілів для стрибкоподібних стохастичних процесів, що моделюються рівнянням Ланжевена з білим шумом Пуассона.

Основна частина наукових результатів особисто представлялась дисертантом на національних і міжнародних наукових конференціях і семінарах [9–16]. Усі наукові положення та висновки, винесені на захист, належать автору дисертації.

Апробація результатів дисертації. Основні наукові результати дисертаційної роботи оприлюднено та обговорено на наступних конференціях і семінарах: Proceedings of the 3rd International Conference “Quantum Electrodynamics and Statistical Physics” (Kharkiv, 2011 р.); Науково-технічній конференції “Фізика, електроніка, електротехніка” (Суми, 2011, 2012, 2013, 2015 pp.); The 2nd International Conference “Nanomaterials: Applications and Properties” (Alushta, 2012 р.); Школа-семінар “Багатомасштабне моделювання фізичних процесів у конденсованих середовищах” (Суми, 2014 р.); Науково-технічній конференції “Інформатика, математика, автоматика” (Суми, 2019 р.).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковані у 16 наукових працях, із них: 5 статей у провідних фахових журналах, що індексуються наукометричними базами Scopus та Web of Science; 2 статті у провідному фаховому журналі, що індексується наукометричною базою Scopus; 1 стаття у матеріалах Міжнародної наукової конференції та 8 тез доповідей конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається із вступу, п'яти розділів, висновків, переліку використаних джерел та додатків. Зміст дисертації викладено на 240 сторінках друкованого тексту, з яких 168 сторінок основного тексту, що містить 23 рисунка. Список використаних джерел складається із 381 найменування, розміщеного на 32 сторінках.

РОЗДІЛ 1

АНОМАЛЬНІ СТОХАСТИЧНІ ПРОЦЕСИ ТА МЕТОДИ ЇХ ОПИСУ

У 1905 році А. Ейнштейн у своїй фундаментальній роботі [17] показав, як із постулатів кінетичної теорії слідує, що мікроскопічні частинки у рідині повинні здійснювати безперервний хаотичний рух. Ейнштейн знайшов закони такого руху (який було названо броунівським) та встановив, що за відсутності зовнішніх сил він є дифузійним. Ця робота відразу стала проривом, як із точки зору розуміння природи стохастичних процесів, так і розуміння природи взагалі. Наприклад, розгляд стаціонарних станів розподілу частинок у гравітаційному полі приводив до кількісних співвідношень, що не тільки дали можливість із найбільшою на той момент точністю визначити сталу Авогадро, а й взагалі експериментально довести існування атомів та молекул [18].

Запропонований видатним вченим підхід стояв у витоків сучасних зasad до вивчення стохастичних процесів та відразу надихнув інших дослідників (в першу чергу таких вчених, як М. Смолуховський та П. Ланжевен) до отримання важливих результатів у вивчені молекулярного руху. Так, Смолуховський у 1906 році сформулював чисто ймовірнісний підхід до вивчення проблеми дифузії [19], що містив у собі концепцію, яку зараз прийнято називати випадковими блуканнями. В свою чергу в 1908 році Ланжевен представив концептуально інший підхід до вивчення даної проблеми [20], який базувався на ідеї стохастичних диференціальних рівнянь. Ці два підходи (випадкові блукання та стохастичні диференціальні рівняння) й досі є фундаментом для сучасної статистичної фізики.

Цікаво відмітити, що вперше дифузійне рівняння з'явилося ще до побудови моделі броунівського руху в 1900 році в дисертації Л. Башельє [21], яка була присвячена вивченю випадкового процесу еволюції ринкових цін. А ось термін “випадкові блукання” та схема цієї класичної в наш час моделі вперше була запропонована К. Пірсоном у 1905 році (як і робота Ейнштейна) у листі до

читачів журнала “Nature” [22]. Хоча перші дослідження випадкових блукань беруть початок ще з XVII сторіччя і пов’язані з азартними іграми.

Питання Пірсона, як і експерименти ботаніка Броуна по спостереженню руху пилок у воді [23], було мотивоване біологічною проблемою, яку він сформулював у такому вигляді: “Чоловік стартує із точки 0 і йде l ярдів по прямій лінії; потім він повертає на будь-який кут і знову йде l ярдів вздовж наступної прямої лінії. Він повторює цей процес n разів. Мене цікавить ймовірність того, що після цих n кроків він буде на відстані між r та $r + dr$ від початкової точки 0.” Відповідь на це питання відразу була дана лордом Релеєм у тому ж випуску журналу “Nature” [24]. Він показав, що при великій кількості кроків n шукана ймовірність для даного ізотропного випадку буде прямувати до величини $P_n(r)dr$, де густина ймовірності

$$P_n(r) \sim \frac{2r}{l^2 n} e^{-r^2/l^2 n}. \quad (1.1)$$

Очевидно, що для отримання розподілу в декартовій системі координат (тобто густини ймовірності $P_n(x, y)$) достатньо поділити вираз справа в формулі (1.1) на $2\pi r$. Водночас Релей зазначив, що він розв’язав більш загальну задачу ще в 1880 році, досліджуючи суперпозицію звукових хвиль в гетерогенних середовищах. А повне рішення проблеми для довільної множини довжин кроків було дано Клюйвером у 1906 році [25, 26]. Як ми бачимо із формулі (1.1), дистанція відхилення блукаючого об’єкту від початку координат масштабується як квадратний корінь із кількості кроків (тобто середньоквадратичне відхилення частинки $\langle r^2 \rangle \propto n$), що є типовим для дифузійних процесів.

Зазначимо, що опис Ейнштейна руху завислих у рідині частинок базувався на трьох наступних постулатах:

- рух різних частинок є незалежним, а тому загальну проблему можна розглядати на прикладі лише однієї частинки (ця умова завжди виконується, якщо концентрація частинок є досить малою);
- існує такий інтервал часу Δt , за який переміщення однієї частинки впро-

довж різних Δt -інтервалів можуть розглядатися як незалежні (умова швидкої декореляція);

- існує кінцеве середньоквадратичне відхилення σ^2 частинки впродовж кожного такого інтервалу Δt .

Звернемо увагу, що другий постулат гарантує марківську природу переміщення на часових масштабах, що більші за Δt ; а третий – відповідає за збіжність розглядуваного процесу до нормальної дифузії. Також зауважимо, що аналогічні припущення є характерними для опису дифузійних стохастичних процесів і на основі інших згадуваних підходів (випадкових блукань та стохастичних диференціальних рівнянь).

Проте інтенсивні теоретичні та експериментальні дослідження показують [27–34], що для широкого ряду стохастичних процесів умови швидкої декореляції та/або кінцевості середньоквадратичного відхилення переміщення частинки можуть порушуватись. У цих випадках в системі спостерігаються ефекти пам'яті, нелинейний ріст дисперсії процесу, відхилення від нормальногорозподілу, порушення ергодичності тощо. Дослідження таких аномальних процесів може значно ускладнюватися у порівнянні з типовими і не піддаватися опису, що базується на класичних засадах. У цьому разі потрібно відштовхуватися від узагальнених рівнянь Ланжевена, узагальнених центральних граничних теорем, неперервних у часі випадкових блукань, методів дробової кінетики тощо [29, 32, 35–39].

1.1. Аномальні транспортні та релаксаційні закони

За останні десятиліття науковий прогрес відкрив дорогу для всі нових експериментальних досліджень та все точніших технологій, які дозволили беззаперечно довести існування величезної кількості складних систем, чия часова еволюція суттєво відрізняється від стандартних законів [30, 40, 41]. Нагадаємо, що під складними розуміють системи, що характеризуються значною різноманітністю структурних одиниць, сильними взаємодіями між ними, або неперед-

бачуваною чи аномальною поведінкою [42].

Явище релаксації описує процес переходу системи між її рівноважними станами та містить важливу інформацію про загальні статистичні характеристики в системі. В багатьох випадках в складних системах закон релаксації відрізняється від класичної експоненціальної релаксації Дебая [43–46]

$$\mu(t) = \langle X_t \rangle = \mu_0 \exp\{-t/T\}, \quad (1.2)$$

де $\langle \cdot \rangle$ – усереднення по реалізаціям відповідного процесу X_t , а T – характерний для даної системи час релаксації. Така аномальна релаксація доволі часто слідує відомому закону Колърауша-Уіллямса-Уоттса (увовільненій експоненціальній функції)

$$\mu(t) = \mu_0 \exp\{-(t/T)^\alpha\}, \quad (1.3)$$

де параметр $\alpha \in (0, 1)$.

Закон Колърауша-Уіллямса-Уоттса вперше був представлений для опису явища розрядження конденсатора (лейденських банок) [47], а згодом – для пояснення діелектричного спектру полімерів [48]. І на сьогодні цей закон є типовим як для дослідження діелектричної релаксації полярних молекул [49–51], так і для релаксації в неоднорідних середовищах (аморфних матеріалах чи спіновому склі) [52–55] або затухання люмінесценції [56–58]. Водночас для діелектричних [49, 50] та невпорядкованих систем [52, 54, 55] за певних умов властивою є більш повільна степенева поведінка

$$\mu(t) \propto (t/T)^{-\beta} \quad (1.4)$$

із $\beta > 0$ та $t \geq T$. До того ж така релаксація спостерігається для релаксаційних процесів, що пов’язані з оборотними хімічними реакціями [59], деформацією полімерів [60, 61] та в’язкопружніх матеріалів [45, 62], турбулентністю в рідких кристалах [63], реакціями у полімерних ланцюгах та адсорбцією на

поверхнях кристалів чи у колоїдних системах [64, 65], динамікою фінансового маркетингу [66] тощо (див. також огляди [30, 67]). Цікаво, що для діелектричної релаксації також спостерігаються випадки, коли можливі переходи між режимами релаксації Кольрауша-Уіллямса-Уоттса при малих значеннях часу та степеневим законом при великих [55, 67–75].

Водночас при релаксаційних процесів у спіновому склі [52, 76, 77], перенесенні енергії у зв’язку із обмінними взаємодіями [78–80], транспорті електронів у твердих тілах [81, 82], транспорті у фрактальних серодовищах [54] за деяких умов спостерігаються цікаві випадки повільної експоненціально-логарифмічної релаксації

$$\mu(t) \propto \exp\{-\gamma \ln^\nu(t/T)\}, \quad (1.5)$$

де $\gamma > 0$, $\nu \geq 1$, $t \geq T$. Неважко побачити, що при $\nu = 1$ рівняння (1.5) приводить до фундаментальної степеневої релаксації, а при $\nu > 1$ описує більш швидке спадання, ніж степеневе з тим же показником (див. порівняння різних режимів релаксації [83]).

Також відмітимо існування надповільної логарифмічної релаксації

$$\mu(t) \propto \ln^\kappa(t/T). \quad (1.6)$$

У останній формулі параметр κ зачасту рівний -1 , час $t \geq T$, а тому при великих значеннях часу така поведінка повільніша за будь-яку степеневу функцію. Зазначена релаксація спостерігається для процесів ущільнення гранул [84, 85], адсорбції-десорбції [86, 87], механічної напруги в еластомерах та гелях [88, 89] і т.д. Також на фіксованих інтервалах часу параметр κ може бути рівним $+1$. Подібна логарифмічна релаксація характерна для процесів релаксації в колоїдних системах [90], ієрархічній динаміці [91], надхолоджених рідинах [92], одномолекулярних білкових амінокислотах [93], полімерних міцелях [94], динаміці фрагментів ДНК [95], електрохімічних процесів в поліанілінових плівках [96] тощо.

Водночас для процесів ущільнення гранул, адсорбції-десорбції можливі й інші, більш складні закони надповільної релаксації [85–87].

Важливим випадком логарифмічної релаксації є процес ущільнення гранул в результаті вібрації. Більш точно такий закон записується у вигляді [84, 97, 98]

$$\mu(t) = \frac{\rho(t) - \rho_0}{\rho_\infty - \rho_0} = 1 - \frac{1}{1 + B \ln(t/T)}, \quad (1.7)$$

де $\rho(t)$ – відношення об'єму гранул до загального об'єму ансамблю (ρ_0 і ρ_∞ – початкове і кінцеве значення цієї величини відповідно), T – час релаксації і $B > 0$ – параметр системи. Схематичне зображення процесу ущільнення ансамблю гранул показано на рисунку 1.1, а електронні мікрознімки – на рисунку 1.2. Гранули зв'язані між собою мостами із рідини і знаходяться в циліндричному резервуарі. Їх перегрупування відбувається в результаті вертикальної вібрації циліндра, якщо енергетичний бар'єр перевищено і частинка переміститься у вакантне порожнє місце. Час між поштовхами є таким, щоб система релаксувала та прийшла в рівноважний стан. Установка для ущільнення ансамблю складається із циліндра, заповненого гранулами; датчика, що фіксує висоту h стовпа гранул і обертового механізму, що генерує послідовні поштовхи. Для руху поршня обертового механізму між циліндром і поверхнею є щілина висотою Δz .

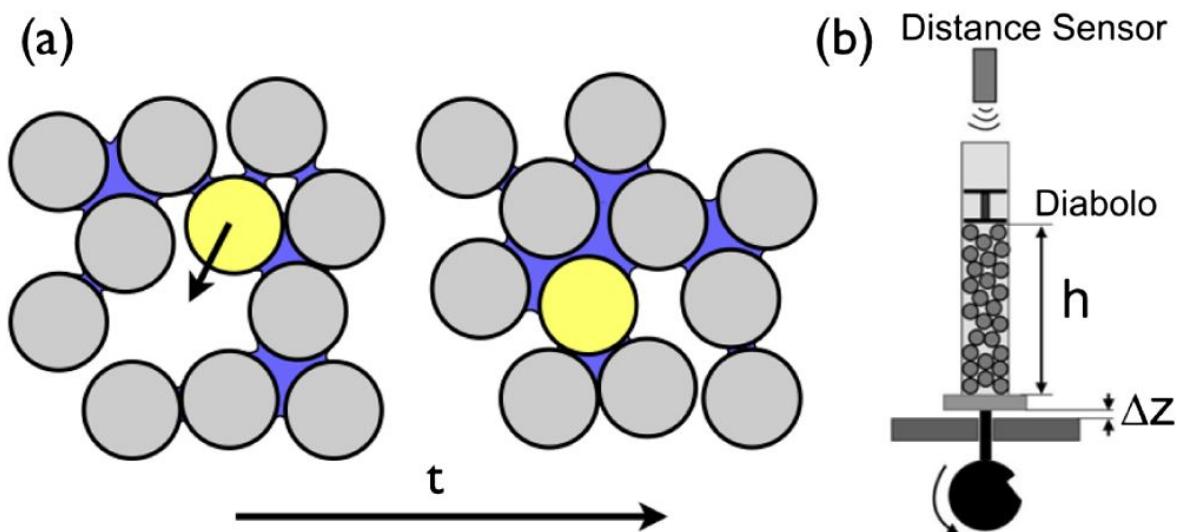


Рис. 1.1. Панель (a) – процес перегрупування системи гранул. Панель (b) – схематичне зображення установки для ущільнення гранул. Рисунки взято з роботи [98].

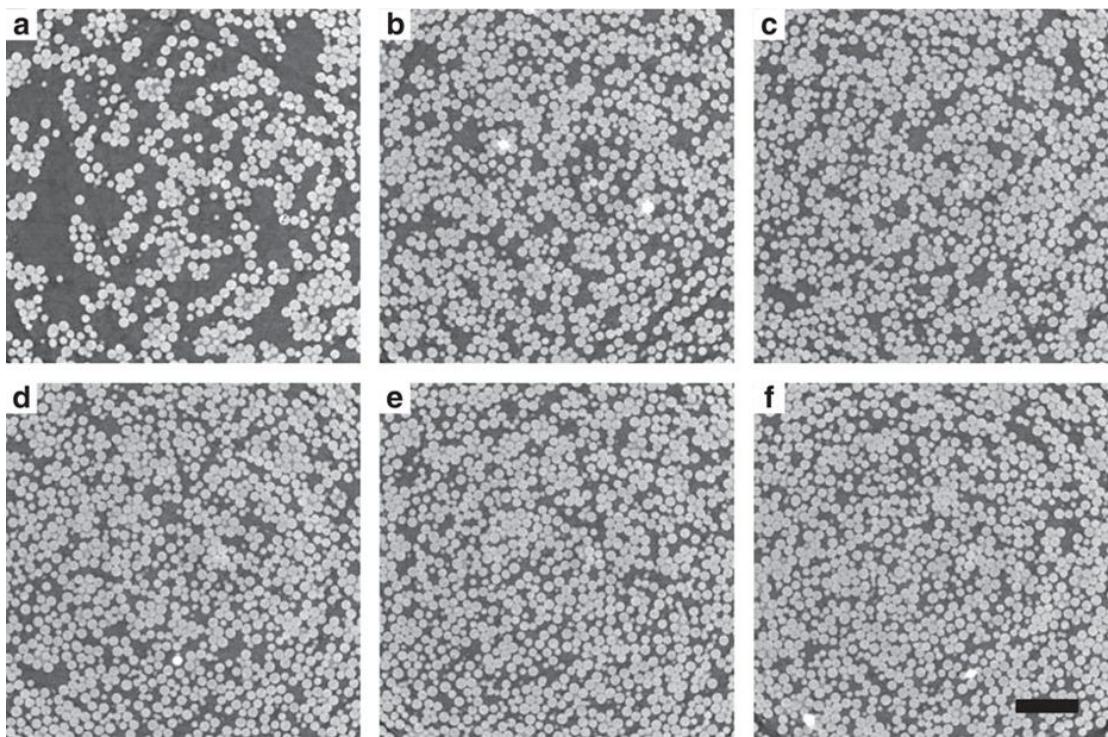


Рис. 1.2. Електронні мікрознімки процесу ущільнення колоїдної суміші, що складається із скляних кульок та водного розчину йодиду калію, після 0, 10, 40, 100, 1000 and 5000 поштовхів відповідно. Прямоугутник на панелі (f) показує масштаб і має довжину 1 мм. Рисунок взято із роботи [99].

Виникає питання про розширення знань щодо законів аномально повільної релаксації в стохастичних системах та розвинення теоретичних методів для їх вивчення. Зокрема, актуальною задачею є дослідження релаксаційних процесів у дворівневих системах, для яких стан системи може перебувати лише в двох рівноважних положеннях: верхньому та нижньому (включеному та виключеному) [100–102]. Вивчення дворівневих систем бере свій початок від робіт лорда Кельвіна по розповсюдженю електричних сигналів в провідниках [103], з чим пов’язана назва телеграфних процесів, які є частковим та найбільш відомим випадком дихотомічних процесів. На сьогоднішній день дворівневі системи стали однією із ключових моделей в статистичній фізиці, оскільки є логічною апроксимацією для великої кількості більш складних систем різноманітної природи.

Наприклад, важливою характеристикою для блукаючої частинки є час її перебування на додатній та від’ємній піввісі. Так, для броунівської частинки функція розподілу відношення часу перебування на додатній піввісі до загального часу дається класичним законом арксінуса [104, 105]. А ось для процесів

Леві такий розподіл буде відрізнятися від броунівської ситуації і даватися розподілом ЛампERTі [106–109]. Зрозуміло, що цей флюктуючий процес переміщення частинки можна описати двома станами: верхнім (скажімо, якщо частинка справа від нуля) та нижнім (якщо частинка, відповідно, зліва від нуля). Особливий інтерес до дворівневих систем пов’язаний з тим, що вони грають важливу роль при вивчені магнітної релаксації, при якій стан системи описується набором спінів (що приймають лише два значення) структурних елементів системи. Наприклад, до таких систем відносяться одномолекульні магніти [110–112] чи одноланцюгові магніти [113–116]. Крім того, згадуваний процес ущільнення гранул також можна наближено розглядати як дворівневий, тобто як результат переходів системи між початковим станом (з низькою щільністю гранул) та кінцевим станом (з високою щільністю).

На додаток дворівнева апроксимація знаходить своє застосування при дослідженні порушення ергодичності для процесів із статистикою Леві [117], динаміці іонів в біологічних транспортних процесах [118, 119], експресії генів [120, 121], ланцюгах нейронних спайків [122], русі бактерій [123], вивчені переривчастої флюорисценції в одиночних молекулах [124] та нанокристалах [125–129], флюктуації флюорисценції наночастинок під дією лазеру [130], динаміці спіну [131, 132], аномальної релаксації для броунівських частинок із флюктуючим дифузійним коефіцієнтом [133], фінансового маркетингу [102]. Водночас дихотомічні шуми в бістабільних системах (не обов’язково дворівневих) використовуються для опису індукованих шумом релаксаційних процесів [134], стохастичного резонансу [134], фазової синхронизації [135] тощо.

На рисунку 1.3 показано цікавий приклад дворівневої системи із аномальною поведінкою, яка останні роки інтенсивно вивчається. Квантова точка може перебувати у нейтральному та іонізованому стані, якщо електрон вилітає із неї. Динаміка вильоту електронів пов’язана з ефектом іонізації Оже [138], а періоди випромінення → відсутність випромінення → випромінення... відповідають нейтральному стану квантової точки → іонізованому → нейтральному... Несподівано, що часи перебування квантової точки в станах випромінення та

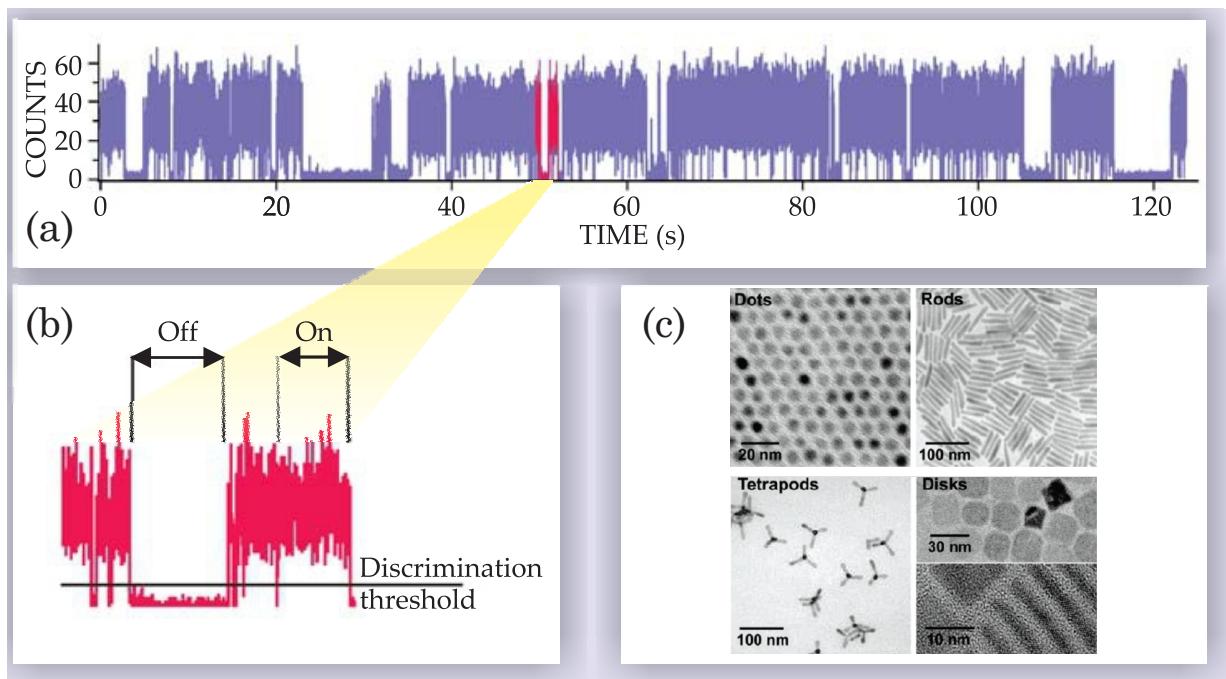


Рис. 1.3. Панель (a) – ілюстрація процесу флюоресценції квантової точки. Панель (b) – збільшення, що показує періоди наявності/відсутності випромінення. Панель (c) – електронний мікрознімок різних конфігурацій нанокристалів $CdSe$. Рисунки (a) і (b) взято із роботи [136], а рисунок (c) – із роботи [137].

відсутності випромінення мають не експоненціальні, як можна було очікувати, а степеневі розподіли $p(\tau) \propto \tau^{-\alpha-1}$ ($1 < \alpha < 2$) із хвостовим індексом α близьким до $3/2$ (це значення пов'язане із кулонівськими взаємодіями між зарядами) [136, 139]. Згідно із відомою теоремою Д. Пойа [105] для випадкового блукання в одно- чи двовимірному просторі ймовірність повернення в початкову точку дорівнює одиниці. А ось для випадку трьох чи більше вимірів вона буде меншою за одиницю. Тобто існує ненульова ймовірність, що частинка втече на нескінченість, інакше кажучи, електрон більше не повернеться до квантової точки. Таким чином, через деякий час квантова частинка мала б залишитися іонізованою назавжди і не випромінювати. Однак через кулонівську взаємодію в матриці, в яку поміщені квантові точки, термальні флуктуації або тунельні ефекти електрон не рухається вільно і ймовірність втекти дорівнює нулю, що і пояснює процес постійного переключення квантової точки між станами.

Аналогічно відхиленню від дебаєвської релаксації в складних системах транспортна поведінка процесів може відрізнятися від класичної броунівської

дифузії. Тобто такі системи не описуються другим законом Фіка, а їх статистика не слідує гауссовій. Одним із найважливіших наслідків є порушення лінійної залежності дисперсії від часу

$$\sigma^2(t) = \langle (\Delta X_t)^2 \rangle = \langle (X_t - \langle X_t \rangle)^2 \rangle \sim D_1 t, \quad (1.8)$$

яка є наслідком марківської природи відповідних стохастичних процесів та центральної граничної теореми [70, 140–146]. В останній формулі D_1 – класичний дифузійний коефіцієнт.

Найчастіше така аномальна поведінка дифузійного процесу характеризується нелінійним у часі степеневим ростом дисперсії процесу

$$\sigma^2(t) \sim D_\alpha t^\alpha, \quad (1.9)$$

де додатній параметр $\alpha \neq 1$ і D_α – узагальнений дифузійний коефіцієнт із розмірністю $[D_\alpha] = \text{см}^2\text{c}^{-\alpha}$. Подібні транспортні патерни пов'язані з дальнодіючими кореляціями в системі, що проявляються в довгих стрибках частинки та/або тривалих часах очікування в поточному стані. Нелінійна дисперсія в таких системах може супроводжуватися немарківською природою процесу (тобто нелокальністю і наявністю ефектів пам'яті) та статистикою Леві [27–33, 146–149]. В залежності від значень параметра α в формулі (1.9) аномальну дифузію поділяють на більш повільну, ніж нормальну, субдифузію ($0 < \alpha < 1$) та більш швидку супердифузію ($\alpha > 1$). Інколи окремо виділяють важливий випадок балістичної дифузії ($\alpha = 2$). Очевидно, що якщо частинка вільно рухається із постійною швидкістю, то спостерігається саме балістична дифузія.

Вперше субдифузія була досліджена в 1975 році в роботі Г. Шера та Е. Монтролла [150] по аналізу електронно-діркового транспорту в аморфних напівпровідниках під впливом електричного поля. У цих тілах рухомі заряди захоплюються локальними неоднорідностями, а потім вивільняються в результаті теплових флюктуацій і знову починають рухатися. Час перебування в такому

нерухомому стані набагато довший, ніж для класичних процесів, а тому і дифузія зарядів є набагато повільнішою. Для побудови моделі такого електронно-діркового транспорту Шер та Монтролл використали підхід неперервних у часі випадкових блукань, ввівши степеневу густину ймовірності часу перебування зарядів у захопленому неоднорідностями стані у вигляді $p(\tau) \sim A/\tau^{1+\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$, $A > 0$) при великих значеннях τ . До інших важливих прикладів субдифузійної поведінки слід віднести субдифузію в переколяційних кластерах [151], живих клітинах [152–154], транспорт на об'єктах з фрактальною геометрією [155, 156], розсіювання домішок в періодичному у просторі потоці рідини [157], динаміка колоїдних частинок [158] і т.д.

Найвідомішим та історично першим випадком супердифузійного процесу є дифузія Річардсона [159], яка описує відносний рух двох частинок в турбулентній рідині (тому таку дифузію ще називають турбулентною). На основі аналізу експериментальних даних Річардсон феноменологічно сконструував відповідне диференціальне рівняння для такого процесу, із якого слідувало, що за час t частинки віддаляються одна від одної на відстань $r(t)$, для якої дисперсія $\langle r^2(t) \rangle \propto t^3$. Проте його передбачення далеко не завжди збігалися з реальною картиною перебігу турбулентних процесів. Серед наступних важливих результатів у дослідженні дифузії Річардсона можна виділити роботи А. Колмогорова [160, 161], який використав масштабуючий аналіз, та Б. Мандельброта [162], що розглянув турбулентність як явище фрактальної природи.

Коректно описати дифузію Річардсона вдалося Р. Бенци та А. Вульпіані [163] на основі комбінування стохастичних диференціальних рівнянь та масштабуючих співвідношень, а також Г. Хеншелю та Й. Прокачча [164], використовуючи лише масштабуючі аргументи. А у 1987 році М. Шлезінгер, Б. Вест та Й. Клафтер [165], модифікувавши основні засади теорії неперервних у часі випадкових блукань, представили концепцію блукань Леві (Lévy walks) та побудували загальну теорію супердифузії, що враховувала нелокальну пам'ять процесу у просторі та часі, а також фрактальні властивості середовища. Ця теорія успішно описала явище супердифузії та узагальнила результати стосовно

турбулентних процесів (у тому числі вже добре відомої дифузії Річардсона) і стала надзвичайно корисною для вивчення різноманітного спектру транспортних процесів [30, 33, 166]. Окрім супердифузії в турбулентних потоках [167], вона також спостерігається в оптичних решітках [168], миграції тварин [169–171], хаотичних системах [172, 173], випадкових полях швидкостей [174], дифузії іонів в нейронах [175] і т.д.

В загальному випадку поведінка дисперсії процесу не обмежена лише степеневою функцією. Зокрема, при певних умовах степеневий закон модифікується і між різними режимами (суб-, супер- та нормальнюю дифузією) спостерігаються перехідні стани, при яких закон дисперсії, крім степеневої функції, містить ще й логарифмічні корекції (наприклад, $\sigma^2(t) \propto t^2 \ln t$, $t^2 / \ln^4 t$ або $t \ln t$) [33, 176–179]. Проте оскільки логарифмічна функція є функцією, що повільно змінюється на нескінченності, то на фікованих інтервалах практично виявити відмінності наведених режимів від поведінки функції $c_1 t^2$ чи $c_2 t$ ($c_{1,2} > 0$) доволі складно.

Разом із степеневими законами існує клас надповільних дифузійних процесів, для яких ріст дисперсії процесу є повільнішим за будь-яку додатну степінь часу, тобто $\sigma^2(t)/t^\alpha \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для всіх $\alpha > 0$. Найвідомішим прикладом такої дифузії є дифузія Синая [27, 177, 180, 181], що описує випадкові блукання у випадкових середовищах, і для якої дисперсія

$$\sigma^2(t) \propto \ln^4 t. \quad (1.10)$$

Цікаво, що оскільки для такого типу дифузії одночасно будуть наявними два механізми, що відповідають за випадкові переміщення та випадкові флуктуації середовища, то розподіл положення частинки буде не гауссовим, а мати експоненціальну поведінку [182–185].

У рамках рівняння Ланжевена дифузія Синая задається стохастичним ди-

ференціальним рівнянням [177, 181, 182]

$$\frac{d}{dt}X(t) = F[X(t)] + \zeta(t), \quad (1.11)$$

де $\zeta(t)$ – термальний білий шум з нульовим середнім значенням і кореляційною функцією $\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle_\zeta = 2D\delta(t-t')$, а $F(x)$ – випадкова сила, що моделює негомогенне середовище. Випадковий потенціал для цієї сили $U(x) = -\int^x dx' F(x')$ є вінерівським процесом, а тому вона задається як гаусівський білий шум із середнім $\langle F(x) \rangle_F = F_0$ та кореляційною функцією $\langle F(x)F(x') \rangle_F = F_0^2 + g\delta(x-x')$. Тут $\langle \cdot \rangle_\zeta$ – усереднення відносно термального шуму $\zeta(t)$ для фіксованої конфігурації $\{F(x)\}$, $\langle \cdot \rangle_F$ – усереднення відносно конфігурації випадкової сили $F(x)$, D і g – інтенсивності відповідних шумів.

У випадку, якщо середнє значення сили $F_0 = 0$, то спостерігається як раз класична дифузія Синая із законом (1.10). Якщо ж $F_0 \neq 0$, то в системі буде присутнім дрифт частинки (наприклад, $\langle X(t) \rangle \sim t^\chi$, де показник χ визначається відношенням рівню безпорядку в системі та термальною активністю), а тому і велике число можливих дифузійних поведінок [177, 181]. На перший погляд логарифмічний закон є дуже несподіваним, однак інтуїтивно його можна пояснити, використовуючи аргумент Арреніуса: значення потенціалу $U(x)$ росте як квадратний корінь із величини відхилення блукаючої частинки, оскільки він являє собою вінерівський процес і є сумою незалежних випадкових величин. Із теорії броунівського руху відомо, що типовий час, який необхідно для проходження відстані x , дається виразом $t \propto \exp\left(\frac{U(x)-U(x_0)}{2D}\right)$, а тому $t \propto \exp\left(\frac{\sqrt{gx}}{2D}\right)$ і звідси типова дистанція $x \propto \ln^2 t$.

Дифузія Синая знаходить своє застосування при описанні динаміки випадкового поля магнітів, динаміки дефектів в кристалах, дифузії заряджених частинок в броунівських ланцюгах тощо. Інші приклади надповільної дифузії були знайдені у резисторних мережах [186], неперервних у часі випадкових блуканнях [187], заряджених полімерах [188], аперіодичних середовищах [189], ітераційних відображеннях [190], динаміці Ланжевена [191], дробній кінетиці [192] і

т.д. Відмітимо також, що цікаві випадки переходів між різними дифузійними та релаксаційними режимами (так, в залежності від параметрів системи дисперсія та релаксація може бути уповільненою експоненціальною, степеневою чи логарифмічною) спостерігаються в системах, що описуються рівнянням Ланжевена з мультиплікативними шумами [193].

Найчастіше поведінка дисперсії для надповільної дифузії слідує степеневій функції від логарифму часу $\sigma^2(t) \propto \ln^\nu t$ із $\nu > 0$. Зокрема, якщо для (1.11) має місце дальнодіюча кореляція $\langle F(x)F(x') \rangle_F \sim |x-x'|^{-a}$ із додатнім параметром $a < 2$, то $\nu = 4/(2-a)$. Але існують й інші, більш загальні закони надповільної дифузії, що включають в себе логарифмічні як частковий випадок [194]. Так, якщо відповідно моменти першого і другого порядку

$$l_1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi w(\xi), \quad l_2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi^2 w(\xi) \quad (1.12)$$

розподілу $w(\xi)$ величини стрибка частинки існують, а всі моменти (в тому числі дробові) розподілу $p(\tau)$ часу очікування – нескінченні (тобто розподіл $p(\tau)$ є надважким), то [194]

$$\sigma^2(t) \sim \begin{cases} l_1^2/V^2(t), & l_1 \neq 0, \\ l_2/V(t), & l_1 = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Тут і далі в роботі функція $V(t)$ – це ймовірність того, що за час t частинка не здійснить жодного стрибка

$$V(t) = 1 - \int_0^t d\tau p(\tau) = \int_t^\infty d\tau p(\tau). \quad (1.14)$$

Нескінченність моментів $p(\tau)$ гарантує, то частинка може дуже довго знаходитись нерухомо у поточному стані (набагато довше, ніж при степеневих хвостах $p(\tau)$), а тому відповідає дуже повільній еволюції дифузійного процесу. Формули (1.13) отримано виходячи із концепції незв'язаних неперервних у часі випадкових блуканнях, і вони описують найзагальніші для даної моделі закони

надповільної дифузії. З-поміж іншого, аналітично показано, що при великих значеннях часу розподіл масштабованого положення частинки у такому випадку буде одно- або двостороннім експоненціальним [195].

Разом з тим транспортні процеси в багатьох системах взагалі не зводяться до дифузійних, навіть аномального типу. Така картина спостерігається, коли момент другого порядку густини $w(\xi)$ є нескінченим. Оскільки в цьому разі частинка може зробити як завгодно довгий стрибок, то дисперсія дослідженого процесу також є нескінченною: $\sigma^2(t) = \infty$ при будь-яких значеннях часу t . Подібні процеси називають польотами Леві, і їх успішно використовують для моделювання значного спектру фізичних явищ різноманітної природи.

На рисунку 1.4 показано яскравий приклад фізичного процесу, що описується, виходячи із концепції польотів Леві: розповсюдження світла в склі Леві [196–198]. Такі матеріали складаються із скляних мікросфер, що поміщені у полімерну матрицю та мають випадкові розміри із степеневим розподілом. А тому траєкторія руху фотона, який після проходження через мікросфери випадковим чином змінює напрям руху в цьому негомогенному середовищі, буде являти собою польоти Леві.

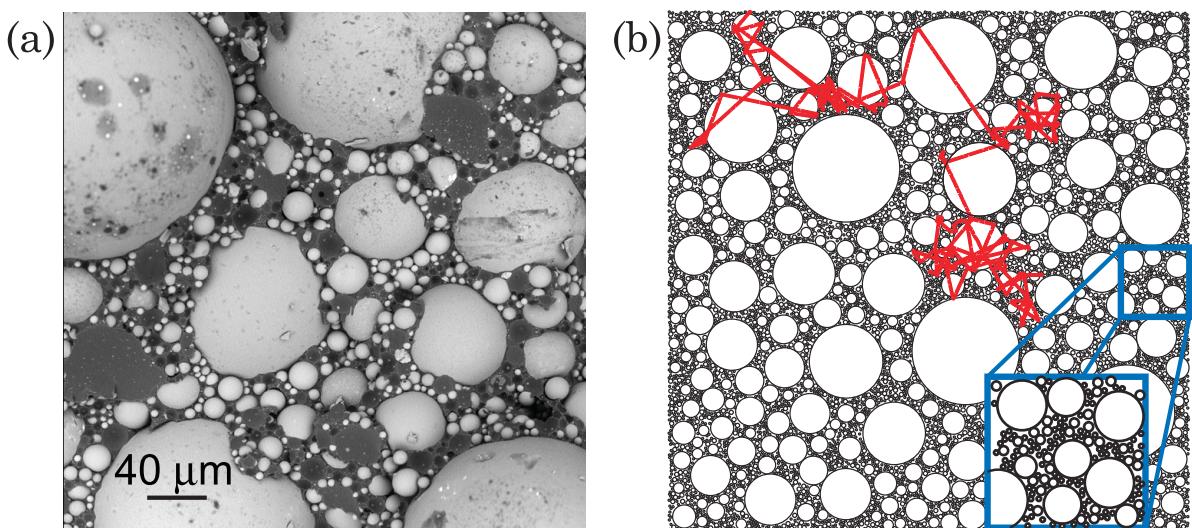


Рис. 1.4. Панель (a) – електронний мікрознімок скла Леві; сірі зони – скляні сфери TiO_2 , темні області – полімерна матриця. Панель (b) – ілюстрація польоту Леві фотона в склі Леві; вкладка показує масштабну інваріантність матеріалу. Рисунок (a) взято із роботи [198], а рисунок (b) – із роботи [196].

1.2. Процеси Леві

Одним із найфундаментальніших результатів в теорії ймовірностей є центральна гранична теорема. Із неї слідує, що сума незалежних однаково розподілених випадкових величин з кінцевим моментом другого порядку є випадковою величиною з розподілом, який прямує до нормального (гауссового) за умови, що кількість доданків зростає [105, 199]. Детальний історичний огляд розвитку цієї теореми міститься, наприклад, у книзі [200]. Для теорії стохастичних процесів дуже важливим є той факт, що центральну граничну теорему можна застосувати для дослідження динамічної проблеми щодо переміщення частинки, яка здійснює випадкові стрибки. А саме, сума переміщень (випадкових величин) буде визначати фінальну позицію частинки, і, як результат, розподіл позиції частинки прямуватиме до нормального, якщо момент другого порядку величини стрибка є скінченим. Тобто дана теорема є математичною основою для величезного числа стохастичних процесів дифузійного типу. Звернемо увагу, що нормальній розподіл є так званим стійким розподілом. Це значить, що сума (в загальному випадку – лінійна комбінація з додатними вагами) двох незалежних випадкових величин буде мати такий же розподіл, як і ці величини (з урахуванням певного масштабування та зсуву).

В 20-х роках ХХ сторіччя П. Леві показав, що окрім нормального існує цілий клас стійких розподілів, які отримали назву α -стійкі розподіли Леві. За виключенням нормального розподілу всі вони мають так звані важкі степеневі хвости та нескінчений момент другого порядку. Із узагальненої центральної граничної теореми випливає, що сума незалежних однаково розподілених випадкових величин із важкими хвостами сходиться до одного із розподілів Леві [105, 201–203]. При цьому розподіл Леві цієї суми матиме такий же хвостовий індекс як і розподіли доданків. Таким чином, нескінченість моменту другого порядку кожного окремого доданку (кроку) тягне за собою нескінченість дисперсії фінальної суми (позиції частинки). З часом виявилося, що розподіли з степеневими хвостами грають важливу роль не тільки в математиці (при ви-

вченні граничних теорем, процесів, що розгалужуються, випадкових визначників тощо [202, 204]), але є ключовими для опису значного числа аномальних процесів у фізиці, біології, економіці, робототехніці та інших галузях [27–33, 205]. У зв’язку із заслугами П. Леві випадкові процеси, для яких є притаманним феномен таких статистичних законів, прийнято називати польотами Леві.

Цікаво відмітити, що історично вперше для опису фізичних процесів часткові випадки розподілів Леві були використані для дослідження спектру іонів у плазмі при наявності ефекту Штарка [206] та флюктуацій гравітаційного поля зірок [207]. Для цих процесів характерним є розподіл Хольцмарка, що має степеневі хвости з індексом $\alpha = 3/2$. На додаток для опису резонансів збуджених станів атомів [208] було використано нерелятивістський розподіл Бретта-Вігнера, який в математиці більш відомий як розподіл Коші із хвостовим індексом $\alpha = 1$. Однак по-справжньому ключова роль степеневих законів стала зрозуміла після “фрактальної революції” [209], що взагалі змінила наш погляд на природу.

Концептуально модель польотів Леві є схожою до броунівського руху, лише із урахуванням того факту, що частинка може робити дуже довгі стрибки та перебувати як завгодно довго в поточному положенні (див. рисунок 1.5). Це призводить до того, що в загальному випадку такий процес є нелокальним у часі та просторі. Зауважимо, що дуже довгі стрибки частинки фактично еквіваленто тому, що вона може переміщуватися із нескінченно великою швидкістю. А втім, польоти Леві не є просто абстрактним математичним формалізмом. По-перше, в деяких задачах ці нюанси моделі не грають жодної ролі; а по-друге, механізми, що призводять до дисперсії досліджуваного об’єкту можуть не відноситися до фізичного руху об’єкту в Евклідовому просторі. Наприклад, причинами можуть бути дальнодіючі взаємодії [210], нетривіальна топологія фазового або конфігураційного простору полімерних систем [211, 212], властивості графів (що моделюють соціальні та Інтернет-мережі, нейронні мережі, генні мережі та інші) [213], спектральні характеристики невпорядкованих середовищ, аморфних матеріалів, скла [214, 215] і т.д.

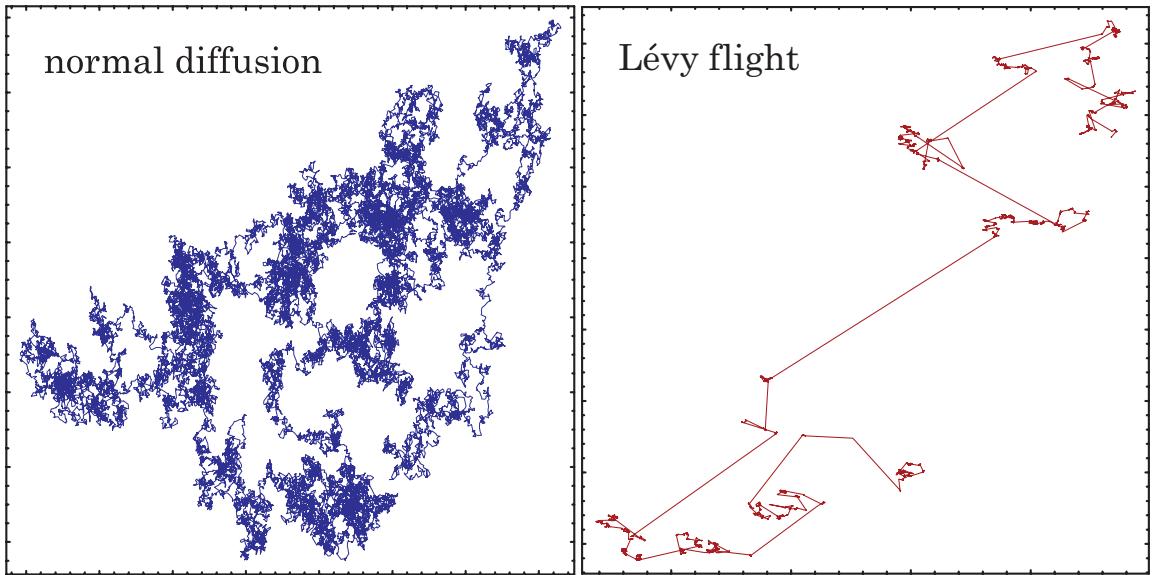


Рис. 1.5. Порівняння типових траєкторій руху для нормальної дифузії та польотів Леві (масштаби на вкладках зліва та справа є різними). У випадку нормальної дифузії кожний крок вносить одинаковий вклад в середні транспортні властивості процесу, а для польотів Леві характерними є довгі стрибки, які відіграють домінуючу роль.

У випадку, коли важкі хвости є несумісними з фізичними характеристиками процесу, степеневі розподіли обрізають, починаючи з певного велико-го значення змінної [216]. Це дозволяє отримати кінцеві моменти випадкової змінної, зберігши при цьому властивості степеневих розподілів в центральній області. Однак таке обрізання є феноменологічною процедурою і містить певну самовільність, що не завжди обґрутована із фізичної точки зору. Інколи проблему розходження моментів (якщо для даного процесу це є проблемою) успішно вирішують застосуванням концепції не польотів Леві, а блукань Леві [33, 165, 178, 217, 218]. Для блукань Леві частинка рухається впродовж випадкового часу в певному напрямку з кінцевою швидкістю, потім змінює напрямок і знову рухається і т.д. Тобто можлива координата частинки завжди обмежена радіусом, що рівний добутку швидкості (максимальної, якщо вона флюктує) на загальний час. Останнім часом цей зручний та потужній підхід став широковживаним для опису гамільтонових систем [219, 220], розповсюдження фотонів в складних середовищах [196], флюорисценції квантових точок [136], холодних атомів [221, 222], руху бактерій, робототехніці і т.д. (див. огляд [33]).

Підкреслимо, що, не зважаючи на дещо незвичні на перший погляд властивості статистики Леві, більшість найважливіших результатів, що стосується дослідження процесів Леві не є суто теоретичною, а знаходить експериментальне підтвердження та застосування. Також відмітимо, що в багатьох випадках опис процесу на основі польотів чи блукань Леві приводить до еквівалентних результатів. Якщо ж різниця у тому, який підхід обрати, існує, то необхідно аналізувати кожен конкретний процес окремо на предмет, яка із концепцій фізично та математично прийнятніша і дає адекватніші результати.

1.3. Методи опису аномальних процесів

Найчастіше стохастичне формулювання аномальних процесів базується на двох згадуваних фундаментальних підходах, а саме: концепції випадкових блукань [146, 223] та стохастичних диференціальних рівняннях [143, 144, 224]. Останній підхід при цьому може розглядатися як із більш фізичної точки зору в рамках рівнянь Ланжевена [70], так із математичної в рамках броунівського руху (вінерівського процесу) [225]. Хоча випадкові блукання та стохастичні диференціальні рівняння мають різну термінологію та математичний апарат, але близько пов'язані та в деяких випадках можна показати їх повну еквівалентність. Зауважимо, що ці стохастичні підходи є мікрокопічними, тобто враховують ймовірнісні властивості кожної окремої блукаючої частинки або властивості середовища відносно цієї частинки. А тому ці підходи дають прозорі та ясні уявлення про досліджуваний процес, а також можливість тонко та гнучко описувати його конкретні нюанси.

1.3.1. Неперервні у часі випадкові блукання

В класичному формулюванні випадкове блукання задається у вигляді суми випадкових змінних $X_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. В такому визначенні час розуміють дискретним, і він просто рівний кількості випадкових величин (доданків у формулі). Для простоти ми привели одновимірний випадок, оскільки опис ба-

гатовимірних блукань є аналогічним. Теорія випадкових блукань у рівній мірі знаходить своє застосування як у чисто математичних задачах, так і як модель для все зростаючої кількості фізичних процесів, із важливими застосуваннями в хімії, біології, економіці, соціальних науках тощо.

При дослідженні фізичних систем однією із найважливіших характеристик є відповідна густина ймовірності для досліджуваного процесу. Для випадкових блукань з дискретним часом необхідні асимптотичні розподіли можна отримувати на основі центральних граничних теорем. Проте дуже часто опис процесу потребує переходу до неперервного часу, врахування випадкових властивостей середовища, дії зовнішніх полів, граничних умов чи властивостей немарковості. В таких випадках на основі класичних ідей випадкових блукань будуються більш загальні теорії, що дозволяють враховувати специфічні особливості процесу. Однією із найпотужніших та гнучких теорій подібного типу є теорія неперервних у часі випадкових блукань¹ [27–33], яка була представлена Е. Мотроллом і Дж. Вейссом у 1965 році [226] та відкрила шлях для висвітлення процесів, у яких інтервали часу між послідовними подіями та величини стрибків, що характеризують переходи системи між її станами, є флюктуючими.

У багатьох ситуаціях для дослідження фізичних явищ найбільш зручним є використання дискретних моделей. Так, згідно з ейнштейнівською картиною дифузійних процесів, стан системи на j -му кроці (координата броунівської частинки) змінюється на певну випадкову величину ξ_j , що розподілена із густинною ймовірності $w(\xi)$. Зміни положення відбуваються через інтервали часу τ_0 , тобто фактично фіксовані часи очікування мають розподіл $\delta(\tau - \tau_0)$. А далі для отримання дифузійного рівняння переходято до неперервної границі, спрямовуючи крок дискретизації τ_0 до нуля. Дискретність не обов'язково має бути по часу. Дискретні стрибки адекватно описують випадкові блукання на решітках різної природи. Наприклад, дискретними у просторі можуть вважатися процеси провідності в твердих тілах, де в результаті нагрівання структурні

¹ В англомовній літературі загальноприйнятим скороченням для такого роду процесів є CTRW (continuous-time random walk), тому далі в роботі ми інколи будемо використовувати цю абревіатуру.

елементи перескають між локалізованими позиціями. Але в цій же ситуації фіксований час очікування τ_0 між послідовними стрибками не відповідає реальній картині, в якій часи очікування між стрибками можуть бути різними, тобто є випадковими величинами з деяким розподілом $p(\tau)$ (для марківських процесів цей розподіл є експоненціальним). Таким чином, у загальному випадку все ж таки потрібно враховувати той факт, що і часи очікування, і довжини стрибків є випадковими величинами з певними розподілами.

Теорія Монтролла-Вейсса дозволяє описати як нормальну дифузію та дебаєвську релаксацію, так і аномальні транспортні процеси та недебаєвську релаксацію виходячи із єдиних ідейних принципів. CTRW-підхід у найбільш зручному вигляді був сформульований Г. Шером та М. Лаксом на основі рекурентних співвідношень [227] і за останні десятиліття став безумовним фундаментом для теоретичних досліджень процесів із аномальною поведінкою. У рамках даної концепції вдається успішно будувати моделі не тільки для процесів з випадковими величинами часів очікування та стрибків процесу, а й для систем з різноманітними кореляціями між ними. Така успішність пов'язана із простотою та гнучкістю моделі CTRW, що дозволяє досліджувати явища різної природи при незначній кількості припущень щодо характеру їх поведінки.

Рівняння Монтролла-Вейсса

Умовна ймовірність переходу системи в кінцевий стан може бути описана через ланцюг рекурентних співвідношень, що пов'язують сусідні моменти часу (дискретні чи континуальні). У загальному випадку такі рівняння є інтегро-диференціальними і поточний стан системи залежить від усіх попередніх станів. Однак часто при накладанні природних умов (наприклад, однорідність чи симетричність процесу у просторі та часі), вони відразу значно спрощуються. Рівняння приймають вигляд згортки функцій, а тому допускають представлення у просторі Фур'є-Лапласа та можливість знаходження аналітичних розв'язків, особливо для асимптотичної у часі поведінки. Зауважимо, що існування таких асимптотичних розв'язків тісно пов'язано із масштабуючими властивостями до-

сліджуваних процесів, і при аналітичному аналізі простір Фур'є-Лапласа якраз дає зручні можливості для їх врахування.

Розглянемо випадковий рух частинок у гомогенному середовищі. Нас буде цікавити поведінка густини ймовірності $P(x, t)$, що в момент часу t положення частинки $X(t) = x$. Зосередимо увагу на одновимірному випадку, оскільки у разі необхідності додаткові просторові координати вводяться дуже легко, не впливаючи ні на логіку розмірковування, ні на характерний вигляд рівнянь. Кожна частинка може здійснювати випадкові стрибки вправо чи вліво на якусь довжину з густиною ймовірності $w(\xi)$, а часи очікування між послідовними стрибками задані з розподілом $p(\tau)$. Ми вважаємо, що величини стрибків та часи очікування незалежні одне від одного величини. Дані два розподіли повністю визначають макроскопічні властивості розглядуваного транспортного процесу. Зазначимо, що ці густини є нормованими: $\int_{-\infty}^{\infty} d\xi w(\xi) = 1$ та $\int_0^{\infty} d\tau p(\tau) = 1$. Так, у просторі Фур'є-Лапласа густина ймовірності $P(x, t)$ визначається відомим рівнянням Монтролла-Вейсс [27, 30, 32, 33]

$$P_{ks} = \frac{1 - p_s}{s(1 - p_s w_k)}. \quad (1.15)$$

В цій формулі використано змінні k та s , щоб позначити координати у просторі Фур'є та Лапласа відповідно ($x \xrightarrow{\mathcal{F}} k$, $t \xrightarrow{\mathcal{L}} s$).

Рівняння Монтролла-Вейсс описує густину ймовірності положення блукуючої частинки, одну із найважливіших характеристик для будь-якого стохастичного процесу, а тому є ключовим при дослідженні аномальних транспортних процесів, модель яких побудована на основі CTRW. Водночас найбільш важливою для визначення статистичних властивостей процесу є поведінка цієї густини ймовірності при великих значеннях часу. Існує дуалізм, при якому великим значенням змінних x та t відповідають малі значення k та s відповідно. Виходячи із цього, асимптотичне розв'язання рівняння Монтролла-Вейсса пов'язане із аналізом поведінки функції P_{ks} в режимі $k \rightarrow 0$ і $s \rightarrow 0$, а потім знаходження оберненого перетворення Фур'є та Лапласа, щоб отримати густину

ну $P(x, t)$ для великих значень змінних x та t . Зауважимо, що в залежності від співвідношення між порядками малості k та s асимптотичних режимів для P_{ks} , а тому і для $P(x, t)$, може бути декілька [228–231].

Точні розв'язки рівняння Монтролла-Вейсса відомі лише в деяких часткових випадках [232–235] в термінах спеціальних функцій. А ось асимптотичні розв'язки рівняння (1.15) знайдені для всіх комбінацій типових розподілів часу очікування та величин стрибків частинки, що мають кінцевий момент другого порядку та/або важкі хвости [236–240]. Виникає також зацікавленість у отриманні асимптотичних розподілів для надповільного CTRW-процесу, що характеризуються розподілами часів очікування із нескінченними моментами будь-якого (в тому числі дробного) порядку. Це повязано з тим, що окрім чисто теоретичного інтересу, надповільні CTRW-процеси успішно зарекомендували себе як модель для явищ із аномальною еволюцією. Наприклад, вони корисні для описання процесів ультраповільної кінетики [192], ітераційних відображенень [190], надповільної дифузії [194], динаміки Ланжевена [241] і т.д. При цьому для незв'язаних надповільних CTRW-процесів відповідні асимптотичні розв'язки рівняння Монтролла-Вейсса отримано у роботі [195] для випадку скінченного моменту другого порядку величин стрибків частинки. Подальший розвиток теорії CTRW пов'язаний із розширенням надповільних транспортних процесів на випадок важких хвостів $w(\xi)$, що характерні для польотів Леві.

Неважко побачити, що із виразу (1.15) слідує інтегральне рівняння

$$P(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi w(\xi) \int_0^t d\tau p(\tau) P(x - \xi, t - \tau) + \delta(x)V(t). \quad (1.16)$$

Як видно із останньої формули, у загальному випадку CTRW-процес проявляє нелокальність у часі та просторі. Цей процес є немарківським, а більш точно напівмарківським [242], який ще інколи називають процесом марківського відновлення, оскільки він поєднує в собі властивості марківських процесів та процесів відновлення. Зауважимо, якщо часи очікування між переходами є експоненціальними з інтенсивністю λ , то процес стає марківським і з виразу

(1.16) можна отримати відоме рівняння Колмогорова-Феллера [36, 243, 244]

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\xi w(\xi)[P(x-\xi,t) - P(x,t)]. \quad (1.17)$$

У разі залежності величин стрибків та часів очікування одне від одного необхідно замість густин $w(\xi)$ і $p(\tau)$ враховувати їх спільну густину ймовірності $\phi(\xi, \tau)$. Очевидно, що можливо два випадки: (i) $\phi(\xi, \tau) = w(\xi|\tau)p(\tau)$ або (ii) $\phi(\xi, \tau) = p(\tau|\xi)w(\xi)$, які описують ситуації, коли за певний час частинка може пройти обмежену дистанцію (випадок (i)), або коли стрибок якоєсь довжини потребує певної затрати часу (випадок (ii)). Тоді можна показати, що рівняння Монтрола-Вейссца записується як (див., наприклад, [33])

$$P_{ks} = \frac{\Psi_{ks} P_k^0}{1 - \phi_{ks}}, \quad (1.18)$$

де $\Psi(\xi, \tau) = \int_{\tau}^{\infty} d\tau' \phi(\xi, \tau')$. Легко переконатися, що в незв'язаному випадку $\phi(\xi, \tau) = w(\xi)p(\tau)$ це рівняння зводиться до (1.15).

Для запису рівняння (1.18) ми ввели густину ймовірності $\Psi(\xi, \tau)$, що частинка переміщується на дистанцію ξ і на момент часу τ продовжує знаходитись в цьому ж стані руху (відносно τ ця величина є ймовірністю). Тоді для випадку (i) маємо $\Psi(\xi, \tau) = w(\xi|\tau) \int_{\tau}^{\infty} d\tau' p(\tau')$, а для випадку (ii) відповідно $\Psi(\xi, \tau) = w(\xi) \int_{\tau}^{\infty} d\tau' p(\tau'|\xi)$. Окрім цього, тут ми врахували довільний початковий розподіл частинки $P(x, t=0) = P^0(x)$. Наприклад, якщо між довжиною переміщення та часом руху має місце балістичний зв'язок $\xi = v\tau$, де v – швидкість руху частинки, і спільна густина $\phi(\xi, \tau)$ дається виразом

$$\phi(\xi, \tau) = \frac{1}{2}\delta(|\xi| - v\tau)p(\tau), \quad (1.19)$$

то із виразу (1.18) отримуємо

$$P_{ks} = \frac{[\Psi_{s+ikv} + \Psi_{s-ikv}]P_k^0}{2 - [\phi_{s+ikv} + \phi_{s-ikv}]} \quad (1.20)$$

Останнє рівняння, а також його варіації, є одним із ключових при дослідженні блукань Леві. Okрім просто випадку балістичного зв'язку важливу роль грають блукання Леві із зупинками [166, 218, 219], флюктуаціями швидкості в результаті дії зовнішнього шуму [245, 246], з випадковими швидкостями [247], нелінійним степеневим зв'язком [230] і т.д. Цікавим є те, що дуже схожі моделі, які мають здавалося б незначні відмінності (наприклад, на початку блукань частинка чекає певний час, а потім рухається, чи навпаки) приводять до суттєво різних розподілів [248], а відповідно і властивостей процесу. Це повязано з тим, що для аномальних процесів характерними є дуже довгі стрибки та частинки очікування, а тому вклад одного “кроку” може бути такого ж порядку як і загальна сума усіх попередніх. Через це для аномальних процесів суттєвим є врахування конкретних нюансів досліджуваної моделі.

Розглянемо далі ще один фундаментальний мікроскопічний підхід для опису динаміки блукаючої частинки, а саме метод Ланжевена. Цей метод, як і будь-який інший, потребує певної апріорної фізичної інформації про специфіку процесу. Водночас, якщо в підході випадкових блукань ймовірнісні характеристики процесу пов'язані із властивостями самої частинки, то для методу Ланжевена вони обумовлюються середовищем (шумом).

1.3.2. Рівняння Ланжевена

Рівняння Ланжевена, тобто звичайне стохастичне диференціальне рівняння, є широковживаним для вивчення стохастичних систем у фізиці, хімії, техніці та інших сферах [70, 143]. Цей метод є надзвичайно потужнім інструментом аналізу стохастичних процесів, що дозволяє враховувати ефекти неоднорідності середовища, кореляції, впливу зовнішніх полів і т.д., особливо в стаціонарних режимах. У найпростішій ситуації, коли шум (випадкова сила) є білим, тобто може бути представленим як похідна по часу від стаціонарного процесу, чий інкременти є незалежними на інтервалах, які не перетинаються, динаміка системи є марківською. В залежності від типу білого шуму, рівняння Ланжевена

відтворюють звичайні рівняння Фоккера-Планка [70, 143–145, 249] (у випадку гауссового білого шуму), дробові рівняння Фоккера-Планка [29, 30, 32, 250–252] (у випадку білих шумів Леві), або описують стани виживання та поглинання системи [241, 253] (у випадку надважких шумів).

Якщо шум є кольоровим, то динаміка системи стає немарківською і відповідна густина ймовірності описується інтегро-диференціальним рівнянням, яке за деяких умов може бути зведене до диференціального за допомогою розкладу Крамерса-Мойяла [70, 145]. Оскільки в загальному випадку такі диференціальні рівняння є нескінченного порядку, то для їх спрощення, а також подальшого теоретичного та числового розв'язку використовують певні апроксимаційні схеми [254–258]. Втім, лише для дуже часткових випадків рівняння Ланжевена відомі його точні аналітичні розв'язки, у такому разі відповідні густини ймовірності також можуть бути точно знайдені [249, 259–261].

Особливим класом є негауссові шуми, що являють собою послідовність δ -імпульсів. Рівняння Ланжевена, що містять такі шуми, асоціюються вже не з рівняннями Фоккера-Планка (навіть узагальненими), а рівняннями Колмогорова-Феллера. Якщо кількість імпульсів за час t є пуассонівським процесом (це відповідає експоненціальному розподілу часів очікування між імпульсами), то такі δ -імпульсні шуми є білими шумами Пуассона і застосовуються для опису процесів стохастичного резонансу [262], процесів вібрації [263, 264], динаміки екосистем [265, 266], індукованого шумом транспорту [267, 268] і т.д. (див. посилання [269–273] із іншими прикладами застосування). Для довільних розподілів часів очікування між імпульсами (тобто непуассонівських шумів) густина ймовірності положення частинки може бути записана у вигляді рекурентного співвідношення [274]. Однак таке представлення має складну структуру і в загальному випадку не дає можливості прийнятного аналітичного аналізу. Відмітимо, що навіть, коли рівняння Ланжевена є першого порядку і має місце пуассонівський білий шум, то точні стаціонарні розв'язки відомі лише в деяких часткових випадках [244, 274–277].

Цікавість щодо шумів Пуассона пов'язана ще й з тим, що еволюція стану

системи під їх дією за своєю природою схожа до процесу випадкових блукань, оскільки її стан (у випадку відсутності зовнішньої сили) змінюється тільки в певні моменти часу, що розподілені з деякою густиною. Таким чином, рівняння Ланжевена з δ -подібними шумами, як і метод випадкових блукань, є моделлю для стрибкоподібних процесів. Далі ми обговоримо зв'язок неперервних у часі випадкових блукань з відповідними рівняннями Ланжевена.

Зв'язок рівнянь Ланжевена з неперервними у часі випадковими блуканнями

Виходячи із схеми CTRW-процесу позицію $X(t)$ частинки, що здійснює випадкові блукання, можна описати у рамках стохастичного диференціального рівняння із шумом у вигляді послідовності δ -імульсів [278]

$$\frac{d}{dt}X(t) = \sum_j \xi_j \delta(t - t_j), \quad (1.21)$$

де ξ_j – довжини випадкових стрибків (амплітуди δ -імпульсів), а t_j – випадкові моменти часу, в які здійснюються ці стрибки. Сума береться по всіх кроках j ($j \geq 1$) за час блукання t . Вважатимемо, що довжини стрибків ξ_j та часи очікування $\tau_j = t_j - t_{j-1}$ є незалежними випадковими величинами, що розподіленими з певними густинами (t_0 – початковий момент часу, для нього стрибка не відбувається). Наприклад, пуассонівський більш шум задається таким δ -імпульсним шумом, що кількість стрибків $N(t)$ за час t є пуассонівським потоком, який характеризується ймовірністю $Q_n = (\lambda t)^n e^{-\lambda t} / n!$ ($n = \overline{0, \infty}$ і λ – параметр інтенсивності), що на інтервалі $(0, t]$ було рівно n стрибків в випадкові моменти t_j .

В загальному випадку процедура отримання густини ймовірності $P(x, t) = \langle \delta(x - X(t)) \rangle$ із рівняння (1.21) та її структура суттєво ускладнюється. Це пов'язано з тим, що для її знаходження потрібно проводити усереднення відносно двох випадкових процесів, що відповідають за довжини стрибків та моменти їх здійснення. В такому разі випадковий процес $N(t)$, що відповідає за кількість

стрибків частинки за час t , вже не є потоком Пуассона, а може мати довільну природу. Для уникнення подібних труднощів переходят від стрибкоподібної до неперервної реалізації досліджуваного процесу.

Якщо середнє значення часу очікування між послідовними стрибками $\bar{\tau} = \langle \tau_j \rangle$ та момент другого порядку довжин стрибків $l_2 = \langle \xi_j^2 \rangle$ існують, то формально картину випадкових блукань (1.21) можна звести до динаміки Ланжевена. Після усереднення на типовому інтервалі $\Delta t \gg \bar{\tau}$ даний процес можна розглядати як випадковий процес із некорельованим на інтервалах Δt гауссовим шумом $\zeta(t)$ із інтенсивністю $l_2/\bar{\tau}$. У цій усередненій картині рівняння (1.21) приймає вигляд звичайного рівняння Ланжевена [278, 279]

$$\frac{d}{dt} X(t) = \zeta(t). \quad (1.22)$$

У разі розходження середнього значення часу очікування між стрибками та/або моменту другого порядку величини стрибка, процес вже не прямує до гауссовоого, яким би довгим ми не взяли проміжок Δt . В такому разі опис CTRW-процесу в рамках динаміки Ланжевена потребує введення негауссовых шумів. При цьому, як і для стандартного опису моделі CTRW, ми вводимо густину ймовірності $w(\xi)$ елементарного мікрокопічного кроку ξ , а також густину ймовірності $p(\tau)$ часу очікування між стрибками. Після параметризації випадкових блукань в неперервній границі положення частинки через v “кrokів” та час, що витрачається на ці “kroki”, задаються відповідно виразами

$$X(v) = \int_0^v dv' \xi(v'), \quad t(v) = \int_0^v dv' \tau(v'). \quad (1.23)$$

Тут $\xi(v)$ та $\tau(v)$ – незалежні випадкові шуми. Очевидно, що в даному контексті $\tau(v)$ приймає лише невід’ємні значення. Таке формулювання можна переписати у термінах системи зв’язаних рівнянь Ланжевена [30, 251, 280–285]

$$\frac{d}{dv} X(v) = \xi(v), \quad \frac{d}{dv} t(v) = \tau(v). \quad (1.24)$$

Система (1.24) може бути інтерпретована як стандартні рівняння Ланжевена відносно внутрішнього часу v , який ще називають операційним. Підкреслимо, що випадковим чином змінюється та залежить від операційного часу не лише координата x , а й фізичний час t . Комбінований процес $X(t)$ у фізичному часі задається згідно із виразом $X(t) = X[v(t)]$, де $v(t)$ є оберненим процесом до $t(v)$, тобто $v(t) = \inf\{v : t(v) > t\}$. Таку концепцію називають методом субординації. Можна показати, що між густиною ймовірності $F(t, v)$ процесу $t(v)$ та густиною ймовірності $G(v, t)$ оберненого процесу $v(t)$ існує наступний зв'язок

$$G(v, t) = -\frac{\partial}{\partial v} \int_0^t dt' F(t', v). \quad (1.25)$$

Крім того, результуюча густина ймовірності $P(x, t)$, що в момент часу t координата $X(t) = x$, дається декомпозицією двох незалежних розподілів $R(x, v)$ (для процесу $X(v)$) та $G(v, t)$ (для процесу $v(t)$)

$$P(x, t) = \int_0^\infty dv R(x, v) G(v, t). \quad (1.26)$$

Відмітимо, що формула (1.25) на перший погляд є неочевидною, проте вона слідує із такого короткого доведення. Для зручності обернені одне до одного випадкові процеси $v(t)$ і $t(v)$ позначимо через $\mathcal{V}(t)$ та $\mathcal{T}(v)$ відповідно. Звернемо увагу, що існування обернених процесів забезпечується тим, що випадкові функції $\mathcal{V}(t)$ та $\mathcal{T}(v)$ є монотонними. Таким чином, справедливим є вираз $\mathcal{V}^{-1}(v) = \mathcal{T}(v)$. Введемо функцію $\Pr\{\cdot\}$, що задає ймовірність події в фігурних дужках, а також функції розподілів для $\mathcal{V}(t)$ та $\mathcal{T}(x)$: $\widehat{G}(v, t) = \int_0^v dv' G(v', t)$ та $\widehat{F}(t, v) = \int_0^t dt' F(t', v)$. Відтак, отримуємо ланцюг рівностей

$$\begin{aligned} \widehat{G}(v, t) &= \Pr\{\mathcal{V}(t) \leq v\} = 1 - \Pr\{\mathcal{V}(t) \geq v\} \\ &= 1 - \Pr\{t \geq \mathcal{V}^{-1}(v)\} = 1 - \Pr\{\mathcal{T}(v) \leq t\} = 1 - \widehat{F}(t, v), \end{aligned} \quad (1.27)$$

що після диференціювання по v приводить до формули (1.25).

Система зв'язаних рівнянь Ланжевена (1.24) вперше була запропонована Г. Фогедбі [280] і являє собою неперервну реалізація CTRW-процесу. Одними із основних переваг такого субординаційного методу є можливість введення в схему CTRW-процесу зовнішніх сил, нетривіальних граничних умов та подальше дослідження транспортних процесів на основі отриманих дробових рівнянь. Однак через залежність координати x та часу t від операційного часу, коректне врахування зовнішніх сил є складною задачею, яка вирішена не для всіх типів відповідних рівнянь Ланжевена [282, 286–290].

Відмітимо, що разом із вищезгаданими мікроскопічними методами фундаментальними для аналізу стохастичних процесів є і макроскопічні підходи, для яких розглядаються властивості середовища як єдиного об'єкту, а не мікроскопічних частинок окремо. Такий опис процесу відбувається завдяки переходу від звичайних диференціальних рівнянь з частинними похідними до дробових рівнянь. Ці підходи є одними із визначальних у дослідженні аномальних транспортних процесів, і їх прийнято називати “дробовою” або “дивною” (strange) кінетикою [29, 30, 148, 291]. До них можна віднести дробові дифузійні та кінетичні рівняння, дробові рівняння Колмогорова-Феллера, дробові рівняння Фоккера-Планка, дробові рівняння Клейна-Крамерса, дробові рівняння Фейнмана-Каца і т.д. Водночас відповідні дробові рівняння найчастіше все ж таки вводяться або феноменологічно, або відштовхуючись від мікроскопічних зasad.

Висновки до розділу 1

Із сказаного у розділі слідує, що на сучасному етапі проблема теоретичного опису феномену аномальних транспортних та релаксаційних процесів залишається відкритою для ряду систем, що демонструють аномально повільну еволюцію. Зокрема, в дисертації буде розширено коло досліджених транспортних процесів до класу польотів Леві з надповільною еволюцією, а також вивчено аномальні процеси релаксації в дворівневих системах, структурні елементи яких змінюються згідно з дихотомічним випадковим процесом. Одержані результати передбачають нові транспортні та релаксаційні режими для складних систем і можуть бути використані при аналізі статистичних даних та прогнозуванні поведінки широкого ряду аномальних стохастичних процесів.

В наступних розділах дослідження еволюції надповільних транспортних та релаксаційних процесів буде досягатися шляхом виконання наступних етапів наукової роботи:

1. Розширення межі застосування теорії неперервних у часі випадкових блукань на випадок важких та надважких хвостів розподілів відповідно довжин стрибків процесу та часів очікування між ними.
2. Знаходження граничних густин ймовірності та відповідних їм масштабуючих функцій часу, що визначають поведінку надповільних польотів Леві при великих значеннях часу, а також проведення детального аналітичного та числового аналізу отриманих результатів.
3. Побудови моделі релаксаційного процесу для дворівневих систем, характеристики яких змінюються у відповідності з дихотомічним процесом, а також одержання інтегрального рівняння, що описує даний процес.
4. Отримання точних розв'язків релаксаційного рівняння, а також асимптотичних законів релаксації для зазначених дворівневих систем за умови, що розподіли часів її перебування в “верхньому” та “нижньому” станах характеризуються важкими та/або надважкими хвостами, і підтвердження знайдених аналітичних результатів числовим моделюванням.

РОЗДІЛ 2

АСИМПТОТИЧНІ У ЧАСІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЛЯ НАДПОВІЛЬНИХ ПОЛЬОТІВ ЛЕВІ

Польоти Леві являють собою клас негауссовых випадкових процесів, чиї стаціонарні інкременти розподілені згідно із важкими густинами ймовірності. Серед важливих особливостей цих процесів можна виділити те, що (подібно до гауссового закону) сума випадкових величин, які розподілені із важкими густинами, має область притягання у вигляді α -стійкого розподілу Леві. Ці розподіли мають степеневі хвости та нескінченну дисперсію, а тому природнім чином з'являються при дослідженні багатьох флюктуаційних процесів із аномальною статистикою розповсюдження, що характеризується значними переміщеннями об'єктів за короткі проміжки часу. Крім того, для польотів Леві є характерною масштабна інваріантність, а тому вони знаходять своє застосування для опису процесів фрактальної природи. І, як вже зазначалося у розділі 1, у разі відсутності нетривіальних граничних умов та зовнішніх потенціалів найбільш зручним описом польотів Леві є підхід неперервних у часі випадкових блукань. А тому дослідження ми будемо проводити, виходячи саме із цієї концепції.

Неперервні у часі випадкові блукання (CTRW-процес) – це спеціальний клас кумулятивних стрибкоподібних процесів, які характеризуються двома множинами випадкових величин, а саме: довжинами стрибків блукаючої частинки і часами очікування між послідовними стрибками. А оскільки для багатьох систем типовими є випадкові величини, які можна інтерпретувати як час між успішними переходами (стрибками) системи в нове положення і мірою цього переходу (величиною стрибка), то CTRW-процес представляє зручну та гнучку модель для різноманітних стохастичних явищ. Так, нагадаємо, CTRW-моделі інтенсивно використовуються для опису аномальної дифузії та переносу речовин в неупорядкованих середовищах [27–33], вивчення процесів міграції [292, 293], аналізу фінансових [294–297], сейсмічних даних [298–300] і т.д.

Згідно із теорією Монтролла-Вейсс [226] густина ймовірності $P(x, t)$ по-

ложення $X(t)$ блукаючої частинки залежить тільки від її спільної густини ймовірності часу очікування та величини стрибка. В загальному випадку положення частинки $X(t)$ є вектором, тобто під довжиною стрибка розуміють переміщення вздовж просторових координатних вісей. Однак, якщо переміщення вздовж різних напрямків незалежні, то достатньо розглядати одновимірну модель. Більш того, часто особливий інтерес представляє незв'язаний (decoupled) випадок, при якому часи очікування і довжини стрибків не залежать між собою. У цій ситуації замість спільної густини ймовірності $\Psi(\xi, \tau)$ ми маємо незалежні густину ймовірності $p(\tau)$ часів очікування між стрибками та густину ймовірності $w(\xi)$ довжин стрибків.

При дослідженні процесів CTRW однією із основних задач є знаходження асимптотичної у часі поведінки густин ймовірності розподілу частинок, які і визначають ключові транспортні властивості процесу. В даному розділі розширено клас таких розв'язків для CTRW-моделей та отримано граничні густини ймовірності для випадку надповільних польотів Леві, що характеризуються важкими хвостами розподілів величин стрибків частинки та надважкими розподілами часів очікування між ними.

2.1. Опис моделі надповільних польотів Леві

Для незв'язаної CTRW-моделі множини часів очікування $\{\tau_n\}$ між послідовними стрибками та довжини стрибків $\{\xi_n\}$ є незалежними, тобто спільна густина ймовірності $\Psi(\xi, \tau) = w(\xi)p(\tau)$. А густина ймовірності $P(x, t)$ положення частинки $X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \xi_n$ в просторі Фур'є-Лапласа дається рівнянням Монтролла-Вейssa (див. розділ 1)

$$P_{ks} = \frac{1 - p_s}{s(1 - p_s w_k)}. \quad (2.1)$$

Тут $w_k = \mathcal{F}\{w(\xi)\} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{ik\xi} w(\xi)$ ($-\infty < k < \infty$) – перетворення Фур'є для густини $w(\xi)$, $p_s = \mathcal{L}\{p(\tau)\} = \int_0^{\infty} d\tau e^{-s\tau} p(\tau)$ ($\text{Res} > 0$) – перетворення Лапласа для $p(\tau)$, а також $P_{ks} = \mathcal{F}\{\mathcal{L}\{P(x, t)\}\}$. Якщо кількість стрибків

$N(t)$ за час t буде нульовою, то положення частинки $X(t) = 0$.

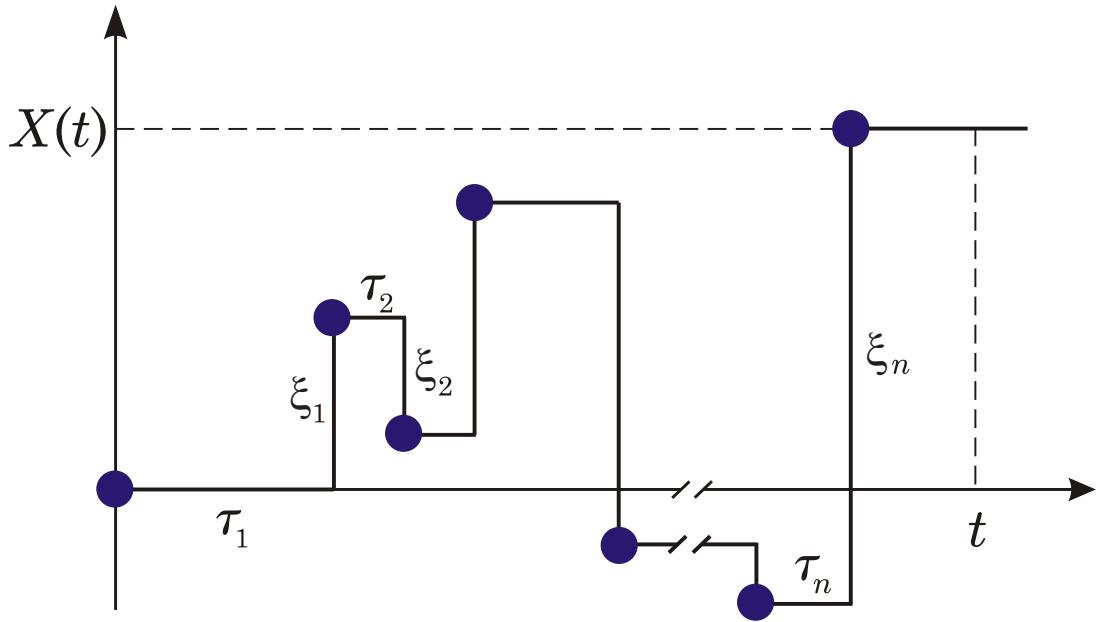


Рис. 2.1. Схематичне зображення одновимірного CTRW-процесу.

Представляючи рівняння (2.1) в формі

$$P_{ks} = \frac{1 - p_s}{s} + \frac{(1 - p_s)p_s w_k}{s(1 - p_s w_k)} \quad (2.2)$$

та застосовуючи до останнього виразу обернене перетворення Фур'є ($\mathcal{F}^{-1}\{f_k\} = f(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} f_k$), отримуємо

$$P_s(x) = \frac{1 - p_s}{s} \delta(x) + \frac{(1 - p_s)p_s}{s} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{w_k}{1 - p_s w_k} \right\}, \quad (2.3)$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака. Далі, використовуючи обернене перетворення Лапласа ($\mathcal{L}^{-1}\{g_s\} = g(t) = (2\pi i)^{-1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds e^{st} g_s$, c – дійсне число, що більше за дійсні частини усіх сингулярностей g_s), із формули (2.3) для густини ймовірності положення частинки знаходимо

$$P(x, t) = V(t) \delta(x) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(1 - p_s)p_s}{s} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{w_k}{1 - p_s w_k} \right\} \right\}. \quad (2.4)$$

Нагадаємо, що в останній формулі

$$V(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1 - p_s}{s} \right\} = \int_t^{\infty} d\tau p(\tau) \quad (2.5)$$

— ймовірність того, що за час t частинка не здійснить жодного стрибка і залишиться в початковому положенні $X(0) = 0$. Згідно з означенням (2.5) ця ймовірність задовільняє умови $V(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ і $V(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow 0$.

Оскільки ми прийняли, що $X(0) = 0$, то початковою умовою є $P(x, t) = \delta(x)$. Також, якщо граничні умови спеціально не вказуються, то маємо $P(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для всіх x . Інакше кажучи, ймовірність знаходження частинки в будь-якому інтервалі є нульовою. А значить при відсутності правильного масштабування при великих значеннях часу буде здаватися, що частинка “розмазана” по всій нескінченній вісі x .

Виходячи із сказаного, доцільно при великих значеннях часу ввести масштабовану координату $Y(t) = a(t)X(t)$ із спеціально підібраною масштабуючою функцією $a(t) \rightarrow 0$, вибір якої залежить від поведінки на нескінченності $p(\tau)$ та $w(\xi)$. Отже, замість густини ймовірності $P(x, t)$ необхідно розглядати асимптотичну поведінку густини $\mathcal{P}(y, t) = a^{-1}(t)P[y/a(t), t]$ положення $Y(t)$. При цьому функцію $a(t)$ треба вибрати таким чином, щоб границя

$$\mathcal{P}(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{a(t)} P\left(\frac{y}{a(t)}, t\right), \quad (2.6)$$

була нетривіальною, тобто не рівною нулю або дельта-функції. Так, у випадку занадто швидкого прямування $a(t)$ до нуля $\mathcal{P}(y) = \delta(y)$, а якщо ж $a(t)$ прямує до нуля недостатньо швидко, то $\mathcal{P}(y) \rightarrow 0$. Тим не менш, для кожного характеру поведінки виразу $1 - w_k$ можна знайти спеціальний клас асимптотичної поведінки $a(t)$, для якого граничні густини ймовірності будуть невиродженими.

Зауважимо, що гранична ймовірність $\mathcal{P}(y)$ і масштабуюча функція $a(t)$ задають поведінку оригінальної густини ймовірності при великих значеннях

часу, а саме із (2.6) при $t \rightarrow \infty$ знаходимо

$$P(x, t) \sim a(t) \mathcal{P}[a(t)x]. \quad (2.7)$$

Проте в деяких ситуаціях це співвідношення буде коректним лише в центральній області $|x| \propto O[1/a(t)]$ та за умови, що $\mathcal{P}(y) \neq 0$. Таким чином, знаходження асимптотичної поведінки $P(x, t)$ в інших областях потребує додаткових уточнень.

Як вже зазначалося, надважкі розподіли часів очікування дають можливість описувати стохастичні процеси із надповільною еволюцією. Вони задаються наступною асимптотичною поведінкою

$$p(\tau) \sim \frac{\varrho(\tau)}{\tau} \quad (\tau \rightarrow \infty), \quad (2.8)$$

де $\varrho(\tau)$ – функція, що повільно змінюється на нескінченості (a slowly varying function) [105, 301, 302], тобто $\varrho(\nu\tau) \sim \varrho(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$ для всіх $\nu > 0$. Оскільки густина $p(\tau)$ нормована ($\int_0^\infty d\tau p(\tau) = 1$), то функція $\varrho(\tau)$ повинна задовольняти умову $\varrho(\tau) = o(1/\ln \tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$. Із асимптотичного співвідношення (2.8) можна переконатися, що всі дробові моменти $\int_0^\infty d\tau \tau^\lambda p(\tau)$ є нескінченними при всіх $\lambda > 0$. Для уникнення непорозуміння наголосимо, що функції, які повільно змінюються на нескінченості мають не степеневу асимптотичну поведінку (це видно із їх визначення), а тому їх не слід плутати із процесами з повільною еволюцією, яка пов'язана із степеневими функціями.

Показано [195], що у випадку, якщо $p(\tau)$ має надважкі хвости, а $w(\xi)$ має скінчений момент другого порядку, відповідні розв'язки записуються як

$$\mathcal{P}(y) = \frac{2 - \delta_{l_1,0}}{2} e^{-|y|} H(l_1 y), \quad (2.9)$$

$$a(t) \sim \begin{cases} \sqrt{2V(t)/l_2}, & l_1 = 0, \\ V(t)/|l_1|, & l_1 \neq 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

при $t \rightarrow \infty$. Тут $\delta_{a,b}$ – символ Кронекера ($\delta_{a,b} = 1$, якщо $a = b$ і $\delta_{a,b} = 0$, якщо $a \neq b$) і $H(x)$ – функція Хевісайда ($H(x) = 1$, якщо $x \geq 0$ і $H(x) = 0$, якщо $x < 0$), а також $l_1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi w(\xi)$ та $l_2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi^2 w(\xi)$ – моменти першого та другого порядку $w(\xi)$ відповідно. Відмітимо, якщо $l_1 \neq 0$, то гранична густина ймовірності одностороння: $\mathcal{P}(y) = 0$ на тій піввісі y , для якої $l_1 y < 0$.

Далі ми отримаємо розв'язки для надповільних блукань з надважкими густинами часів очікування (2.8) на випадок симетричних та несиметричних важких хвостів величини стрибка частинки, що є характерними для польотів Леві. Підкреслимо, що розподіли $w(\xi)$ можуть мати один або два важких хвоста. Однак гранична густина ймовірності $\mathcal{P}(y)$ буде залежати лише від найбільш повільно спадаючої гілки $w(\xi)$. А тому, не втрачаючи узагальнення, ми вважаємо обидва хвости $w(\xi)$ важкими

$$w(\xi) \sim \frac{u_{\pm}}{|\xi|^{1+\alpha_{\pm}}} \quad (\xi \rightarrow \pm\infty). \quad (2.11)$$

Тут константи $u_{\pm} > 0$ і хвостові параметри $\alpha_{\pm} \in (0, 2]$. Остання формула описує несиметричний випадок, якщо ж ми розглядаємо симетричну ситуацію ($w(\xi) = w(-\xi)$), то очевидно, що

$$w(\xi) \sim \frac{u}{|\xi|^{1+\alpha}} \quad (|\xi| \rightarrow \infty), \quad (2.12)$$

де $u > 0$ і $\alpha \in (0, 2]$.

Неважко переконатися, що для важких густин з важкими хвостами абсолютний момент порядку λ , тобто $\int_{-\infty}^{\infty} d\xi |\xi|^{\lambda} w(\xi)$, скінчений тільки за умови $\lambda < \alpha$ (у несиметричному випадку ми вважаємо, що $\alpha = \min\{\alpha_{\pm}\}$). Отже, дисперсія випадкового стрибка ξ завжди є нескінченною. Таким чином, із властивостей $p(\tau)$ та $w(\xi)$ слідує, що частинка може здійснювати великі стрибки і при цьому дуже довго перебувати у поточній позиції. Із цього випливає, що задані розподіли $w(\xi)$ та $p(\tau)$ дійсно моделюють надповільні польоти Леві.

2.2. Границні густини ймовірності у вигляді оберненого переворення Фур'є та відповідні їм масштабуючі функції

В даному підрозділі ми в першу чергу сконцентруємо увагу на аналітично-му вивчені більш складного та загального випадку несиметричного розподілу довжин стрибків і покажемо, що цей факт суттєво впливає на границний розподіл масштабованого положення частинки. Розв'язки для симетричних блукань будуть безпосередньо слідувати із несиметричних.

Вихідним пунктом для отримання асимптотичної поведінки густини ймовірності $P(x, t)$ при великих значеннях часу є формула (2.3). Далі ми спираємося на тауберову теорему Карамати [105, 303, 304], з якої випливає: нехай функція $v(t)$ починаючи з деякої точки буде монотонною і $v_s \sim s^{-\gamma} L(1/s)$ ($0 < \gamma < \infty$) при $s \rightarrow 0$, то $v(t) \sim t^{\gamma-1} L(t)/\Gamma(\gamma)$ при $t \rightarrow \infty$, де $L(t)$ повільно змінюється на нескінченності. Таким чином, поведінка $P(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$ буде задаватися поведінкою $P_s(x)$ при $s \rightarrow 0$. Отже, виходячи із сказаного, нам необхідно для початку знайти асимптотику p_s при малих значеннях s .

Функція $V(t)$ повільно змінюється на нескінченності, оскільки при $\nu > 0$ має місце співвідношення

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V(\nu t)}{V(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{\nu t}^{\infty} d\tau p(\tau)}{\int_t^{\infty} d\tau p(\tau)} = 1. \quad (2.13)$$

Зауважимо, що для надважких розподілів $p(\tau)$ середнє число стрибків за час t дается асимптотичним виразом $\langle N(t) \rangle \sim 1/V(t)$ [146]. Із цієї формулі видно, що і число стрибків дуже повільно росте. Для порівняння, якщо часи очікування мають кінцеве середнє значення, то $\langle N(t) \rangle \propto t$; якщо ж $p(\tau)$ – важкі густини і хвостовий індекс $\alpha \in (0, 1]$, то $\langle N(t) \rangle \propto t^\alpha$ при $\alpha \in (0, 1)$ і $\langle N(t) \rangle \propto t/\ln t$ при $\alpha = 1$.

Згідно з означенням $V_s = (1 - p_s)/s$, а з іншого боку знаходимо

$$V_s = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} dt e^{-t} V(t/s). \quad (2.14)$$

Із властивості функцій, що повільно змінюються на нескінченності [301, 302], при $s \rightarrow 0$ маємо $V_s \sim V(1/s)/s$, а тому

$$1 - p_s \sim V(1/s). \quad (2.15)$$

Значить рівняння (2.3) при $s \rightarrow 0$ дає

$$\begin{aligned} P_s(x) &\sim \frac{V(1/s)}{s} \delta(x) + \frac{V(1/s)[1 - V(1/s)]}{2\pi s} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{-ikx}}{V(1/s) + 1 - w_k}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Далі, застосовуючи до $P_s(x)$ сформульовану вище тауберову теорему Карамати, із виразу (2.16) знаходимо

$$P(x, t) \sim V(t)\delta(x) + \frac{V(t)[1 - V(t)]}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{-ikx}}{V(t) + 1 - w_k} \quad (2.17)$$

($t \rightarrow \infty$). За допомогою цього результату ми можемо представити граничну густину ймовірності (2.6) у вигляді оберненого перетворення Фур'є

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{-iky}}{1 + \Phi(k)}, \quad (2.18)$$

де

$$\Phi(k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - w_{ka(t)}}{V(t)}. \quad (2.19)$$

Зауважимо, що так як $\int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-iky} = 2\pi\delta(k)$ і $\Phi(0) = 0$, то легко побачити, що ця густина ймовірності нормована: $\int_{-\infty}^{+\infty} dy \mathcal{P}(y) = 1$. Однак факт невід'ємності $\mathcal{P}(y)$ із формули (2.18) неочевидний і буде показаний далі. Нижче ми отримаємо явні представлення $\mathcal{P}(y)$ та відповідні масштабуючі функції $a(t)$ у всіх необхідних ситуаціях.

2.2.1. Залежність отриманих розв'язків від параметрів розподілів довжин стрибків

1) Розподіли довжини стрибка з $l_1 \neq 0$

За умови, якщо перший момент l_1 густини ймовірності величини стрибка існує і не рівний нулю, то із співвідношення $1 - w_k = \int_{-\infty}^{\infty} dx(1 - e^{ikx})w(x)$ при $k \rightarrow 0$ слідує $1 - w_k \sim -il_1k$, а тому рівняння (2.19) зводиться до вигляду

$$\Phi(k) = -ik \operatorname{sgn}(l_1) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|l_1|a(t)}{V(t)} \quad (2.20)$$

($\operatorname{sgn}(x) = \pm 1$, якщо $x \gtrless 0$). При виборі наступної асимптотичної поведінки масштабуючої функції

$$a(t) \sim \frac{V(t)}{|l_1|} \quad (2.21)$$

($t \rightarrow \infty$) рівняння (2.20) дає $\Phi(k) = -ik \operatorname{sgn}(l_1)$. Значить із (2.18) ми отримаємо односторонній експоненціальний розподіл

$$\mathcal{P}(y) = e^{-|y|} H(l_1 y). \quad (2.22)$$

Формули (2.21) і (2.22) описують CTRW-процес, що характеризується надважкими розподілами $p(\tau)$ та розподілом $w(\xi)$ із $l_1 \neq 0$. Тобто сюди відноситься як випадок важких хвостів $w(\xi)$ при $\alpha_{\pm} \in (1, 2]$, так і випадок $w(\xi)$ із $l_2 < \infty$ (див. рівняння (2.9)).

2) Розподіли довжини стрибка з $\alpha \in (1, 2)$ і $l_1 = 0$

Якщо момент першого порядку $w(\xi)$ рівний нулю, тоді для знаходження асимптотичної поведінки $1 - w_k$ при $k \rightarrow 0$ використовуємо наступну формулу

$$\begin{aligned} 1 - w_k &= \frac{1}{|k|} \int_0^{\infty} dx(1 - \cos x)w^+\left(\frac{x}{|k|}\right) \\ &\quad + \frac{i}{k} \int_0^{\infty} dx(x - \sin x)w^-\left(\frac{x}{|k|}\right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

де функції

$$w^\pm(\xi) = w(\xi) \pm w(-\xi). \quad (2.24)$$

Покладемо

$$\alpha = \min\{\alpha_+, \alpha_-\} \quad (2.25)$$

і зосередимося поки що на випадку $\alpha \in (1, 2)$.

Використовуючи стандартні інтеграли [305]

$$\int_0^\infty dx \frac{1 - \cos x}{x^{1+\nu}} = \frac{\pi}{2\Gamma(1+\nu) \sin(\pi\nu/2)} \quad (2.26)$$

($0 < \nu < 2$) та

$$\int_0^\infty dx \frac{x - \sin x}{x^{1+\nu}} = -\frac{\pi}{2\Gamma(1+\nu) \cos(\pi\nu/2)} \quad (2.27)$$

($1 < \nu < 2$), можна показати, що із рівняння (2.23) слідує

$$1 - w_k \sim q|k|^\alpha - i\operatorname{sgn}(k)r|k|^\alpha \quad (2.28)$$

($k \rightarrow 0$). Тут введено позначення

$$q = \frac{\pi}{2\Gamma(1+\alpha) \sin(\pi\alpha/2)} (u_+ \delta_{\alpha\alpha_+} + u_- \delta_{\alpha\alpha_-}), \quad (2.29)$$

$$r = \frac{\pi}{2\Gamma(1+\alpha) \cos(\pi\alpha/2)} (u_+ \delta_{\alpha\alpha_+} - u_- \delta_{\alpha\alpha_-}), \quad (2.30)$$

де $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функція. Відмітимо, що вирази (2.28)–(2.30) справедливі також і для випадку $\alpha_{\max} = \max\{\alpha_+, \alpha_-\}$, тобто для $\alpha_{\max} \in [\alpha, 2]$.

Нехай масштабуюча функція $a(t)$ при $t \rightarrow \infty$ має наступну асимптотичну

поведінку

$$a(t) \sim \left(\frac{V(t)}{\sqrt{q^2 + r^2}} \right)^{1/\alpha}. \quad (2.31)$$

Тоді із співвідношень (2.19) та (2.28) отримуємо

$$\Phi(k) = (\cos \varphi - i \operatorname{sgn}(k) \sin \varphi) |k|^\alpha, \quad (2.32)$$

і гранична густина ймовірності (2.18) представляється у формі

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{(1 + \cos \varphi k^\alpha) \cos(yk) + \sin \varphi k^\alpha \sin(yk)}{1 + 2 \cos \varphi k^\alpha + k^{2\alpha}}. \quad (2.33)$$

В останній формулі введено

$$\cos \varphi = \frac{q}{\sqrt{q^2 + r^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{r}{\sqrt{q^2 + r^2}} \quad (2.34)$$

і разом з тим

$$\begin{aligned} \sqrt{q^2 + r^2} &= \frac{\pi}{2\Gamma(1 + \alpha) \sin(\pi\alpha/2) |\cos(\pi\alpha/2)|} \\ &\times [2 \cos(\pi\alpha) u_+ u_- \delta_{\alpha\alpha_+} \delta_{\alpha\alpha_-} + u_+^2 \delta_{\alpha\alpha_+} + u_-^2 \delta_{\alpha\alpha_-}]^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Зауважимо, гранична густина ймовірності (2.33) та відповідна їй масштабуюча функція (2.31) описують як несиметричні, так і симетричні блукання. А саме, якщо $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (1, 2)$ та $u_+ = u_- = u$, то маємо $\varphi = 0$ і величина

$$\sqrt{q^2 + r^2} = \frac{\pi u}{\Gamma(1 + \alpha) \sin(\pi\alpha/2)}. \quad (2.36)$$

А значить рівняння (2.33) та (2.31) зводяться відповідно до

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\cos(yx)}{1 + x^\alpha} \quad (2.37)$$

та

$$a(t) \sim \left(\frac{\Gamma(1+\alpha) \sin(\pi\alpha/2)}{\pi u} V(t) \right)^{1/\alpha} \quad (2.38)$$

при $t \rightarrow \infty$.

3) Розподіли довжини стрибка з $\alpha \in (0, 1)$

Оскільки при $\alpha \in (0, 1)$ момент першого порядку густини $w(\xi)$ не існує, то в цьому випадку зручно замість формул (2.23) виходити із представлення

$$\begin{aligned} 1 - w_k = & \frac{1}{|k|} \int_0^\infty dx (1 - \cos x) w_+ \left(\frac{x}{|k|} \right) \\ & - \frac{i}{k} \int_0^\infty dx \sin x w_- \left(\frac{x}{|k|} \right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

На перший погляд здається, що при $\alpha_{\max} \in [\alpha, 1)$ і $\alpha_{\max} \in [1, 2]$ мають місце дві різні ситуації. Проте, так як нас цікавить головний член розкладу $1 - w_k$ при $k \rightarrow 0$, ми можемо обмежитись розглядом (2.39) тільки при $\alpha_{\max} \in [\alpha, 1)$. Тоді, використовуючи асимптотичну формулу (2.11), стандартний інтеграл (2.26) та формулу

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x^{1+\nu}} = \frac{\pi}{2\Gamma(1+\nu) \cos(\pi\nu/2)} \quad (2.40)$$

($0 < \nu < 1$), можна показати, що рівняння (2.39) при $k \rightarrow 0$ відповідає виразу (2.28) з параметрами q і r , які даються формулами (2.29) та (2.30). А оскільки ці результати мають місці також і для $\alpha_{\max} \in [1, 2]$, то ми приходимо до висновку, що вирази (2.31) і (2.33) (для функції $a(t)$ та густини $\mathcal{P}(y)$ відповідно) справедливі не тільки при $\alpha \in (1, 2)$, але й при $\alpha \in (0, 1)$.

Відмітимо, що і в цій ситуації із формул (2.31) та (2.33) при $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (0, 1)$ і $u_+ = u_- = u$ отримуємо вирази (2.38) та (2.37) для симетричного випадку.

4) Розподіли довжини стрибка з $\alpha = 1$

Позначимо перший і другий член в правій частині рівняння (2.39) відповідно через J_1 та J_2 (тобто $1 - w_k = J_1 - J_2$), тоді для $\alpha = 1$ при $k \rightarrow 0$ отримаємо

$$J_1 \sim \frac{\pi}{2} (u_+ \delta_{1\alpha_+} + u_- \delta_{1\alpha_-}) |k|, \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} J_2 &\sim ik \int_{c|k|}^{\infty} dx \frac{\sin x}{x^2} (u_+ \delta_{1\alpha_+} - u_- \delta_{1\alpha_-}) \\ &\sim i(u_+ \delta_{1\alpha_+} - u_- \delta_{1\alpha_-}) k \ln \frac{1}{|k|}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

де константа $c > 0$. Якщо параметр

$$\rho = u_+ \delta_{1\alpha_+} - u_- \delta_{1\alpha_-} \quad (2.43)$$

не рівний нулю, то $J_1 = o(J_2)$, а значить

$$1 - w_k \sim -i\rho k \ln \frac{1}{|k|} \quad (2.44)$$

($k \rightarrow 0$) і, врахувавши, що при $t \rightarrow \infty$ $\ln[|k|a(t)] \sim \ln a(t)$, маємо

$$\Phi(k) = -i\rho k \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{V(t)} \ln \frac{1}{a(t)}. \quad (2.45)$$

Нехай при великих значеннях часу виконується спiввiдношення

$$\frac{|\rho|a(t)}{V(t)} \ln \frac{1}{a(t)} \sim 1. \quad (2.46)$$

Тоді можна показати, що

$$a(t) \sim \frac{V(t)}{|\rho| \ln[1/V(t)]} \quad (2.47)$$

при $t \rightarrow \infty$, а значить $\Phi(k) = -ik \operatorname{sgn}(\rho)$ і гранична густина

$$\mathcal{P}(y) = e^{-|y|} H(\rho y). \quad (2.48)$$

Порівняння формул (2.48) та (2.22) показує, що густина $\mathcal{P}(y)$ при $\alpha = 1$ і $\rho \neq 0$ має таку ж форму, як і у випадку $\alpha \in (1, 2)$ при $l_1 \neq 0$. Тільки роль моменту першого порядку $w(\xi)$ (що рівний нескінченності при $\alpha = 1$) буде відігравати параметр ρ . Проте це тільки часткова аналогія, так як в цих ситуаціях будуть різні масштабуючі функції (2.21) та (2.47).

У протилежному випадку, якщо $\rho = 0$ (це може бути тільки, коли $\alpha_+ = \alpha_- = 1$ та $u_+ = u_- = u$), $J_2 = 0$ і вклад робить тільки член J_1 , тобто

$$1 - w_k \sim \pi u |k| \quad (2.49)$$

($k \rightarrow 0$), а тому

$$\Phi(k) = \pi u k \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{V(t)}. \quad (2.50)$$

I, вибираючи поведінку масштабуючої функції у вигляді

$$a(t) \sim \frac{V(t)}{\pi u}, \quad (2.51)$$

із виразу (2.18) із $\Phi(k) = |k|$ ми отримуємо

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{\cos(yk)}{1 + k}. \quad (2.52)$$

Цей результат є частковим випадком формули (2.37) із тією ж масштабуючою функцією, що і в рівнянні (2.38) при $\alpha = 1$. Також неважко впевнитися, що формули (2.52) і (2.51) описують симетричний випадок з $\alpha = 1$. Цікаво, що гранична густина (2.52) може бути виражена в термінах відомих спеціальних функцій, а саме: інтегрального синуса $\operatorname{si}(y) = - \int_y^\infty dx \sin(x)/x$ та косинуса

$\text{Ci}(y) = - \int_y^\infty dx \cos(x)/x$. Дійсно, використовуючи косинус перетворення Фур'є для $(1+x)^{-1}$ [306], ми знаходимо

$$\mathcal{P}(y) = -\frac{1}{\pi} [\sin(|y|) \text{si}(|y|) + \cos(y) \text{Ci}(|y|)]. \quad (2.53)$$

5) Розподіли довжини стрибка з $\alpha = 2$

Оскільки $\alpha_{\pm} \leq 2$, то із умови $\alpha = 2$ випливає $\alpha_+ = \alpha_- = 2$. Очевидно, що якщо $l_1 \neq 0$, то гранична густина ймовірності дається формулою (2.22) з відповідною її масштабуючою функцією (2.21). У той же час для $l_1 = 0$ із співвідношень (2.23) та (2.19) при $k \rightarrow 0$ отримуємо

$$\begin{aligned} 1 - w_k &\sim (u_+ + u_-)k^2 \int_{c|k|}^\infty dx \frac{1 - \cos x}{x^3} \\ &\sim \frac{1}{2}(u_+ + u_-)k^2 \ln \frac{1}{|k|} \end{aligned} \quad (2.54)$$

$(0 < c < \infty)$, а значить

$$\Phi(k) = \frac{1}{2}(u_+ + u_-)k^2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a^2(t)}{V(t)} \ln \frac{1}{a(t)}. \quad (2.55)$$

При наступній поведінці масштабуючої функції

$$a(t) \sim 2 \sqrt{\frac{V(t)}{(u_+ + u_-) \ln[1/V(t)]}} \quad (2.56)$$

$(t \rightarrow \infty)$ маємо $\Phi(k) = k^2$ і, таким чином, із рівняння (2.18) слідує

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{\cos(yk)}{1 + k^2} = \frac{1}{2} e^{-|y|}. \quad (2.57)$$

Зрозуміло, що цей результат при $u_+ = u_-$ відповідає і симметричному випадку з $\alpha = 2$. Тим не менш, оскільки умова $l_1 = 0$ не обов'язково тягне за собою $w(-\xi) = w(\xi)$, то двостороння експоненціальна густина (2.57) відповідає більш широкому, ніж симетричний, класу густин величини стрибка з

$\alpha = 2$ та $l_1 = 0$. Відмітимо також, що гранична густина ймовірності (2.57), як і (2.52), може бути отримана із загального представлення (2.33) при виконанні граничних переходів $\alpha \rightarrow 2$ та $\alpha \rightarrow 1$. Втім, оскільки вирази (2.56) і (2.47) не слідують із формули (2.31), то ми описали ці випадки окремо. Графіки експоненціальних розподілів $\mathcal{P}(y)$ показано на рисунку 2.2. Числове моделювання для всіх розподілів $\mathcal{P}(y)$, графіки яких наведено в розділах 2 і 3, проводилося на основі методу, що представлений у підрозділі 3.7.

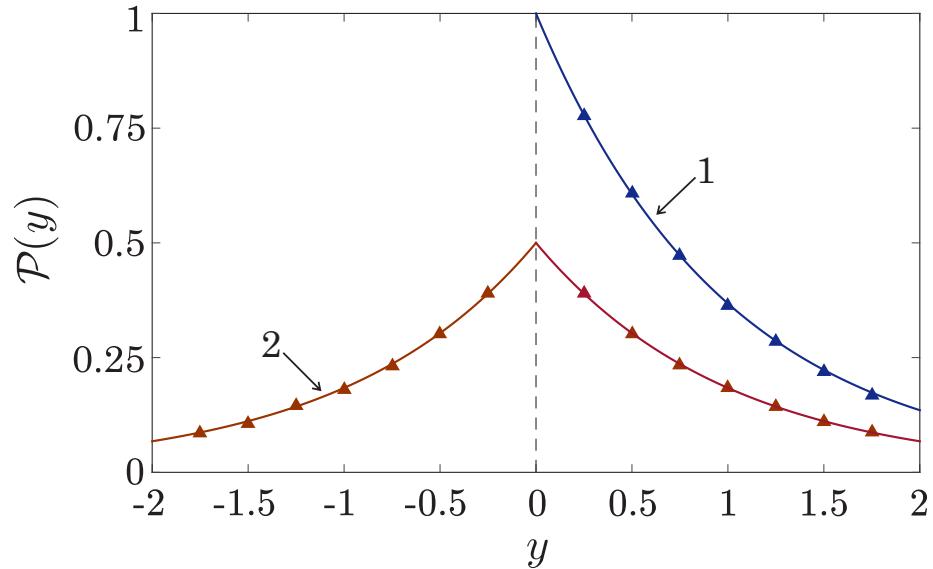


Рис. 2.2. Експоненціальні граничні густини $\mathcal{P}(y)$. Лінія 1 показує односторонню експоненціальну функцію (2.22), лінія 2 – двосторонню експоненціальну функцію (2.57), а трикутники – результати числового моделювання.

Завершуючи підрозділ, випишемо для зручності граничні густини $\mathcal{P}(y)$ та відповідні масштабуючі функції $a(t)$ у симетричному випадку, а саме

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{\cos(yk)}{1 + k^\alpha} \quad (2.58)$$

та

$$a(t) \sim \begin{cases} \left(\frac{\Gamma(1+\alpha) \sin(\pi\alpha/2)}{\pi u} V(t) \right)^{1/\alpha}, & 0 < \alpha < 2, \\ \sqrt{\frac{2V(t)}{u \ln[1/V(t)]}}, & \alpha = 2 \end{cases} \quad (2.59)$$

($t \rightarrow \infty$). Цікаво, що рівняння (2.58) при $\alpha = 2$ зводиться до (2.9) з $l_1 = 0$,

тобто дає двосторонній експоненціальний розподіл. Однак, зважаючи на те, що $l_2 = \infty$, масштабуюча функція в (2.59) відрізняється від (2.10). На рисунку 2.3 показано поведінку граничних густин ймовірності $\mathcal{P}(y)$ у симетричному випадку для хвостових індексів $\alpha = 0.5$ та $\alpha = 1.5$. Розподіли для несиметричних блукань побудовано в наступному розділі.

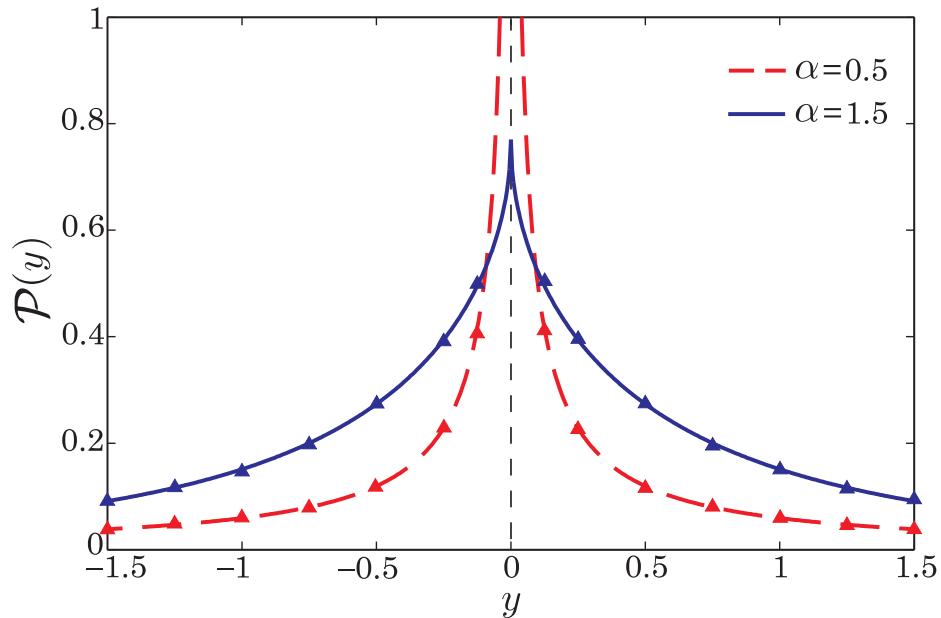


Рис. 2.3. Симетричні граничні густини $\mathcal{P}(y)$ для різних значень параметру α . Лінії відповідають аналітичній поведінці (2.58), а трикутники – числовому моделюванню.

2.3. Транспортні властивості надповільних польотів Леві

Підводячи підсумки описаним вище результатам, бачимо, що польоти Леві із надважкими густинами ймовірності часів очікування характеризуються двома різними ситуаціями. У першому випадку гранична густина дається виразом (2.33) і описує процес при важких хвостах $w(\xi)$ із $\alpha \in (0, 1)$ та $\alpha \in (1, 2)$ при $l_1 = 0$. Також до першого випадку можна віднести граничну густину (2.52) при $\alpha = 1$ з $\rho = 0$, якщо в (2.33) покласти $\alpha = 1$ і $\varphi = 0$. Характерною особливістю цих граничних густин є факт, що вони мають важкі хвости із індексом α (див. підрозділ 3.2). Тобто дисперсія масштабованого положення $Y(t)$ буде завжди нескінченною і має місце процес переносу недифузійного типу.

У другому випадку ми маємо односторонній експоненціальний розподіл

(2.22), що відповідає густинам ймовірності величини стрибка із $l_1 \neq 0$. Односторонні експоненціальні густини виникають і в ситуації (2.48), коли $\alpha = 1$ з $\rho = u_+ \delta_{1\alpha_+} - u_- \delta_{1\alpha_-} \neq 0$. До цього ж випадку ми відносимо і двосторонній експоненціальний розподіл (2.57) при $\alpha = 2$ і $l_1 = 0$. Як неважко зрозуміти, в силу експоненціальних граничних розподілів, другий випадок характеризується скінченою дисперсією масштабованого положення $X(t)$.

Постає питання про можливість отримання інформації про властивості розподілу оригінального положення $X(t)$ із властивостей масштабованого $Y(t)$. Моменти n -го порядку величини $X(t)$ у просторі Лапласа даються виразом

$$\langle X^n(t) \rangle_s = (-i)^n \frac{1-p_s}{s} \frac{d^n}{dk^n} \frac{1}{1-p_s w_k} \Big|_{k=0}. \quad (2.60)$$

Звідси неважко показати, що моменти першого и другого порядку визначаються відповідно формулами

$$\langle X(t) \rangle_s = \frac{l_1 p_s}{s(1-p_s)}, \quad \langle X^2(t) \rangle_s = \frac{2l_1^2 p_s^2}{s(1-p_s)^2} + \frac{l_2 p_s}{s(1-p_s)}. \quad (2.61)$$

Таким чином, ми бачимо, що дисперсія положення $X(t)$ для будь-яких значень часу є нескінченою при $\alpha \in (0, 2]$ в силу того, що для важких хвостів $w(\xi)$ завжди $l_2 = \infty$. Отже, при даному масштабуванні у разі експоненціальних граничних розподілів $\mathcal{P}(y)$ ми не можемо коректно отримати асимптотичний розподіл для положення $X(t)$ при $t \rightarrow \infty$ згідно із формулою (2.7). Для експоненціальних випадків $\mathcal{P}(y)$ це співвідношення буде виконуватися для $P(x, t)$ лише у центральній області $|x| \propto O[1/a(t)]$. А ось хвости $P(x, t)$ повинні спадати набагато повільніше, ніж експонента, щоб забезпечити нескінченність дисперсії. Факт експоненціальних граничних розподілів $\mathcal{P}(y)$ пов'язаний з тим, що у границі $t \rightarrow \infty$ у формулі (2.18) при розкладі $1 - w_k$ враховано тільки головні члени, які є аналітичними та не відображають природу важких хвостів $w(\xi)$. А втім, при великих (але кінцевих) значеннях часу для густини $P(x, t)$ у режимі рідкісних флюктуацій $|x| \gg O[1/a(t)]$ будуть важливими уточнення,

які прямають до нуля у границі $t \rightarrow \infty$ (і ми маємо співвідношення (2.7)), але дозволяють отримати коректні хвости $P(x, t)$. Докладний аналіз цього аспекту проведено в підрозділі 3.3, де показано, що густини $P(x, t)$ завжди мають важкі хвости і нескінченну дисперсію.

Нескінченність дисперсії на перший погляд здається дещо незвичним модельним результатом. Проте, як зазначалося у розділі 1, механізми, що є причиною дисперсії, не обов'язково є результатом фізичного руху в Евклідовому просторі, а можуть мати іншу природу, пов'язану із дальнодіючими взаємодіями, нетривіальною топологією простору чи спектральними характеристиками середовища [33]. Із точки зору аналізу процесу, це означає, що не існує жодної залежності від часу функції $l(t)$, що для положення частинки $X(t)$ момент другого порядку $\langle X^2(t) \rangle \propto l(t)$. Разом з тим інколи для дослідження масштабуючих властивостей польотів Леві хвости $w(\xi)$ феноменологічним чином обрізають, а при проведенні числового моделювання відкидають занадто великі інкременти. Блокаючу частинку фактично поміщають в уявний ящик, розміри якого з часом ростуть [251].

Однією із найважливіших характеристик дифузійних процесів та процесів Леві є їх масштабна інваріантність (скейлінг). Це особлива симетрія системи, яка полягає в тому, що зміна масштабів одних змінних може бути скомпенсована перетворенням масштабів інших. Із математичної точки зору така масштабна інваріантність означає, що для різноманітних моделей та режимів випадкових блукань при великих значеннях часу густина ймовірності зазвичай може бути подана у вигляді [33, 203, 250]

$$Q(x, t) = \frac{1}{t^\beta} W\left(\frac{x}{t^\beta}\right), \quad (2.62)$$

де параметр $\beta > 0$ і $W(\cdot)$ – деяка густина ймовірності (наприклад, гауссіана для нормальній дифузії). Якщо мова йде про дифузійний процес, то для нормальної дифузії параметр $\beta = 1/2$, для субдифузії – $\beta < 1/2$, а для супердифузії – $\beta > 1/2$. Цей параметр називають показником Хюрста (Hurst

exponent) і, окрім транспортних, він дуже тісно пов'язаний із скейлінговими та фрактальними властивостями процесу [307]. В такому разі і для дифузійних процесів, і для процесів Леві параметр β характеризує швидкість розширення фронту частинок, а саме – вона росте по закону t^β . Таким чином, якщо для випадкового процесу момент другого порядку є скінченим, то його дисперсія $\sigma^2(t) \propto t^{2\beta}$. При цьому нормальна форма дифузійного пакету або форма Леві можуть не зберігатися, і для її дослідження потрібна додаткова інформація.

Виявляється, що для надповільних процесів (дифузійного типу чи польотів Леві) масштабування не є степеневим. Із описаних вище результатів слідує (див. також [190, 192, 194]), що замість формулі (2.62) будемо мати

$$P(x, t) = \frac{1}{b(t)} W\left(\frac{x}{b(t)}\right) \quad (2.63)$$

із масштабуючою функцією $b(t)$, що не є степеневою і описує принципово інших характер розширення фронту частинок. У нашому випадку в центральній області $|x| \propto O[1/a(t)]$ маємо $b(t) \sim 1/a(t)$ і $W(y) \sim \mathcal{P}(y)$ при $t \rightarrow \infty$.

Зазначимо, що масштабуючі функції $a(t)$ повільно змінюються на нескінченності, тобто $a(t) \sim a(\nu t)$ ($\nu > 0$) при $t \rightarrow \infty$. Із формулі (2.7) неважко побачити, що еволюція густини ймовірності $P(x, t)$ також буде дуже повільною, а саме – при великих значеннях часу $P(x, \nu t) \sim P(x, t)$ ($\nu > 0$). Таким чином, хоча розподіл $P(x, t)$ не є стаціонарним, але при $t \rightarrow \infty$ за будь-які кінцеві інтервали часу зміна профілю розподілу частинок буде дуже малою, не зважаючи на можливість блокаючої частинки робити дуже довгі стрибки. Цей результат є цікавою наслідком моделі, в якій має місце два в певній мірі протилежних механізми: миттєві довгі стрибки частинки та дуже довгі часи очікування у поточному положенні.

Висновки до розділу 2

1. У розділі досліджено асимптотичну у часі поведінку для польотів Леві з надповільною еволюцією. Задані процеси моделювалися, виходячи із концепції неперервних у часі випадкових блукань, що характеризуються важкими густинами ймовірності величин стрибків процесу та надважкими густинами ймовірності часів очікування між ними. Асимптотичну поведінку надповільних польотів Леві представлено у вигляді граничних густин ймовірності спеціальним чином масштабованого значення процесу (положення блукаючої частинки) та відповідних їм масштабуючих функцій часу. Зазначені результати отримано на основі асимптотичного розв'язку рівняння Монтролла-Вейсса з використанням тауберової теореми Карамати.

2. Граничні густини ймовірності виражено у вигляді оберненого перетворення Фур'є і показано, що вони залежать тільки від параметрів розподілів довжин стрибків випадкових блукань. В залежності від цих параметрів проведено класифікацію граничних густин ймовірності, згідно з якою дані розподіли будуть мати хоча б одну гілку з важким хвостом або задаватися одно/двосторонніми експоненціальними функціями.

3. Водночас показано, що масштабуючі функції будуть визначатися параметрами розподілів як довжин стрибків, так і часів очікування між ними. Більш того, вони належатимуть до класу функцій, що повільно змінюються на нескінченості. Таким чином, розширення профілю розподілу випадкових блукань відбудуватиметься дуже повільно, не зважаючи на можливість процесу здійснювати довгі стрибки.

Основні результати, що представлені у цьому розділі, опубліковано в статтях [1, 2].

РОЗДІЛ 3

ДОСЛІДЖЕННЯ ОСНОВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГРАНИЧНИХ ГУСТИН ЙМОВІРНОСТІ

У розділі отримано ряд теоретичних результатів, що дозволяють всебічно вивчити основні властивості для досліджуваної в попередньому розділі моделі масштабованих надповільних польотів Леві.

3.1. Альтернативні представлення граничних розподілів

У силу осцилюючого характеру підінтегральної функції в виразі (2.33) використання густини $\mathcal{P}(y)$ у такому вигляді є не дуже практичним. А тому, щоб краще вивчити аналітичні властивості граничних густин ймовірності, у даному підрозділі ми знайдемо їх більш зручні форми представлення.

3.1.1. Представлення у вигляді оберненого перетворення Мелліна

Для знаходження альтернативного представлення граничної густини ймовірності $\mathcal{P}(y)$ для початку ми перепишемо формулу (2.33) у вигляді

$$\mathcal{P}(y) = \mathcal{P}_1(y) + \operatorname{sgn}(y)\mathcal{P}_2(y), \quad (3.1)$$

де ми ввели функції

$$\mathcal{P}_1(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{(1 + \cos \varphi k^\alpha) \cos(yk)}{1 + 2 \cos \varphi k^\alpha + k^{2\alpha}}, \quad (3.2)$$

$$\mathcal{P}_2(y) = \frac{\sin \varphi}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{k^\alpha \sin(|y|k)}{1 + 2 \cos \varphi k^\alpha + k^{2\alpha}}. \quad (3.3)$$

Застосуємо до функцій $\mathcal{P}^\pm(y) = \mathcal{P}_1(y) \pm \mathcal{P}_2(y)$ (де $\mathcal{P}^\pm(y) = \mathcal{P}(y)|_{y \geq 0}$) перетворення Мелліна. Нагадаємо, що для деякої функції $f(y)$ воно задається інтегралом $f_r = \mathcal{M}\{f(y)\} = \int_0^\infty dy f(y) y^{r-1}$, при цьому для $f(y) = \int_0^\infty dx u(yx)v(x)$

справедливим є вираз $f_r = u_r v_{1-r}$ (див., наприклад, [308]). Виходячи із сказаного, отримуємо

$$\mathcal{P}_r^\pm = \mathcal{M}\{\cos y\}F_{1-r} \pm \mathcal{M}\{\sin y\}G_{1-r}. \quad (3.4)$$

Згідно з книгою [306] мають місце формули $\mathcal{M}\{\cos y\} = \Gamma(r) \cos(\pi r/2)$ ($0 < \operatorname{Re} r < 1$), $\mathcal{M}\{\sin y\} = \Gamma(r) \sin(\pi r/2)$ ($-1 < \operatorname{Re} r < 1$), а також

$$\begin{aligned} F_{1-r} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{1 + \cos \varphi y^\alpha}{1 + 2 \cos \varphi y^\alpha + y^{2\alpha}} y^{-r} \\ &= \frac{1}{\pi \alpha} \int_0^\infty dy \frac{1 + \cos \varphi y}{1 + 2 \cos \varphi y + y^2} y^{\frac{1-r}{\alpha}-1} \\ &= \frac{\cos[\varphi(1-r)/\alpha]}{\alpha \sin[\pi(1-r)/\alpha]} \end{aligned} \quad (3.5)$$

($1 - \alpha < \operatorname{Re} r < 1$) та

$$\begin{aligned} G_{1-r} &= \frac{\sin \varphi}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{y^{\alpha-r}}{1 + 2 \cos \varphi y^\alpha + y^{2\alpha}} \\ &= \frac{\sin \varphi}{\pi \alpha} \int_0^\infty dy \frac{y^{\frac{1-r}{\alpha}}}{1 + 2 \cos \varphi y + y^2} \\ &= \frac{\sin[\varphi(1-r)/\alpha]}{\alpha \sin[\pi(1-r)/\alpha]} \end{aligned} \quad (3.6)$$

($1 - \alpha < \operatorname{Re} r < 1 + \alpha$).

Таким чином, із співвідношення (3.4) ми знаходимо

$$\mathcal{P}_r^\pm = \frac{\Gamma(r) \sin[(\pi\alpha/2 \pm \varphi)(1-r)/\alpha]}{\alpha \sin[\pi(1-r)/\alpha]} \quad (3.7)$$

($\max\{1 - \alpha, 0\} < \operatorname{Re} r < 1$). Використовуючи означення оберненого перетворення Мелліна: $\mathcal{M}^{-1}\{f_r\} = f(y) = (2\pi i)^{-1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dr f_r y^{-r}$, позначення $\mathcal{P}(y)|_{y \geq 0} = \mathcal{P}^\pm(y)$ і вираз (3.7), ми можемо представити граничну густину

їмовірності (2.33) як обернене перетворення Мелліна

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dr \frac{\Gamma(r) \sin[\phi(y)^{\frac{1-r}{\alpha}}]}{\alpha \sin(\pi \frac{1-r}{\alpha})} |y|^{-r}, \quad (3.8)$$

де $\max(1 - \alpha, 0) < c < 1$ і введено функцію

$$\phi(y) = \frac{\pi\alpha}{2} + \operatorname{sgn}(y)\varphi. \quad (3.9)$$

Нагадаємо, що величина φ знаходиться із виразу (2.34).

Важливо підкреслити, що представлення (2.33) та (3.8) справедливі при всіх значеннях хвостового індекса α із інтервалу $(0, 2]$. Оскільки граничні густини ймовірності при $\alpha = 1$ і $\alpha = 2$ (див. підрозділ 2.2) мають просту форму, то далі ми зосередимо увагу на виразі (3.8) тільки для $\alpha \in (0, 1)$ і $\alpha \in (1, 2)$. Можливі чотири різні ситуації для цікавих нам значень хвостового параметра, кожну із яких ми окремо опишемо нижче.

1) $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha_+ \neq \alpha_-$

У цьому випадку із рівнянь (2.29), (2.30), (2.34) і (2.35) слідує, що $\cos \varphi = \cos(\pi\alpha/2)$ та $\sin \varphi = (\delta_{\alpha\alpha_+} - \delta_{\alpha\alpha_-}) \sin(\pi\alpha/2)$. Із двох останніх рівностей отримуємо $\varphi = (\delta_{\alpha\alpha_+} - \delta_{\alpha\alpha_-})\pi\alpha/2$, а тому рівняння (3.9) дає наступний результат

$$\phi(y) = [1 + \operatorname{sgn}(\sigma y)] \frac{\pi\alpha}{2}, \quad (3.10)$$

де $\sigma = \delta_{\alpha\alpha_+} - \delta_{\alpha\alpha_-} = \operatorname{sgn}(\alpha_+ - \alpha_-)$. Вводячи позначення $\phi(y) = \phi_{\operatorname{sgn}(\sigma y)}$, із виразу (3.10) отримуємо $\phi_+ = \pi\alpha$ і $\phi_- = 0$. На основі цієї рівності робимо висновок, що розподіл $\mathcal{P}(y) = 0$ при $\sigma y < 0$, тобто у випадку $\alpha \in (0, 1)$ і $\alpha_+ \neq \alpha_-$ густину $\mathcal{P}(y)$ буде односторонньою. І далі, у відповідності з рівністю (3.8), можемо отримати формулу

$$\mathcal{P}(y) = \frac{H(\sigma y)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dr \frac{\Gamma(r) \sin(\phi_+ \frac{1-r}{\alpha})}{\alpha \sin(\pi \frac{1-r}{\alpha})} |y|^{-r} \quad (3.11)$$

із параметром $\phi_+ = \pi\alpha$.

2) $\alpha \in (1, 2)$, $\alpha_+ \neq \alpha_-$, $l_1 = 0$

За цих умов вираз (2.34) приводить до системи рівнянь $\cos \varphi = -\cos(\pi\alpha/2)$ та $\sin \varphi = -\sigma \sin(\pi\alpha/2)$, розв'язок якої дається значенням $\varphi = -\sigma(\pi - \pi\alpha/2)$. Отже, згідно з означенням (3.10) маємо

$$\phi(y) = \frac{\pi\alpha}{2} - \operatorname{sgn}(\sigma y) \left(\pi - \frac{\pi\alpha}{2} \right), \quad (3.12)$$

а тому $\phi_+ = \pi(\alpha - 1)$ і $\phi_- = \pi$. Таким чином, використовуючи обернене перетворення Мелліна для гамма-функції [306]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dr \Gamma(r) |y|^{-r} = e^{-|y|} \quad (3.13)$$

($c > 0$), рівняння (3.8) може бути записано у вигляді

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y) &= \frac{H(\sigma y)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dr \frac{\Gamma(r) \sin(\phi_+ \frac{1-r}{\alpha})}{\alpha \sin(\pi \frac{1-r}{\alpha})} |y|^{-r} \\ &\quad + H(-\sigma y) \frac{1}{\alpha} e^{-|y|}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

де $\phi_+ = \pi(\alpha - 1)$. Із цих результатів робимо висновок, якщо $\alpha \in (1, 2)$ і $\alpha_+ \neq \alpha_-$, то, на відміну від попереднього випадку, гранична густина ймовірності буде двосторонньою. До того ж, як ми бачимо із формули (3.14), ця густина буде експоненціальною при $y > 0$ і $\alpha = \alpha_-$ або при $y < 0$ і $\alpha = \alpha_+$. Зазначимо, що при $y = 0$ передбачається виконання умови $H(y\sigma)|_{y=0} = H(\sigma)$.

3) $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (0, 1)$, $u_+ \neq u_-$

У даному випадку рівняння (2.34) дає

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{(u_+ + u_-) \cos(\pi\alpha/2)}{\sqrt{u_+^2 + u_-^2 + 2 \cos(\pi\alpha) u_+ u_-}}, \\ \sin \varphi &= \frac{(u_+ - u_-) \sin(\pi\alpha/2)}{\sqrt{u_+^2 + u_-^2 + 2 \cos(\pi\alpha) u_+ u_-}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ввівши позначення

$$\epsilon = \frac{u_+ - u_-}{u_+ + u_-}, \quad (3.16)$$

із формули (3.15) випливає

$$\varphi = \operatorname{sgn}(\epsilon) \arctan \left[|\epsilon| \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right]. \quad (3.17)$$

Тут $\arctan(\cdot)$ – головне значення оберненої до тангенса функції. Зрештою, представляючи двозначну функцію (3.9) як $\phi(y) = \phi_{\operatorname{sgn}(\epsilon)y}$, де

$$\phi_{\pm} = \frac{\pi\alpha}{2} \pm \arctan \left[|\epsilon| \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right], \quad (3.18)$$

та використовуючи рівняння (3.8), ми знаходимо двостороннє представлення граничної густини ймовірності

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y) &= \frac{H(\epsilon y)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dr \frac{\Gamma(r) \sin(\phi_+ \frac{1-r}{\alpha})}{\alpha \sin(\pi \frac{1-r}{\alpha})} |y|^{-r} \\ &\quad + \frac{H(-\epsilon y)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dr \frac{\Gamma(r) \sin(\phi_- \frac{1-r}{\alpha})}{\alpha \sin(\pi \frac{1-r}{\alpha})} |y|^{-r}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Так як $\alpha \in (0, 1)$ і $|\epsilon| < 1$, то легко перевірити, що $\arctan[|\epsilon| \tan(\pi\alpha/2)] \in (0, \pi\alpha/2)$, а тому $\pi\alpha/2 < \phi_+ < \pi\alpha$, $0 < \phi_- < \pi\alpha/2$ і $\phi_+ > \phi_-$.

4) $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (1, 2)$, $u_+ \neq u_-$, $l_1 = 0$

I, нарешті, в останньому випадку густина ймовірності $\mathcal{P}(y)$ дається тією ж формулою (3.19), що і в попередньому. А для знаходження параметрів ϕ_+ і ϕ_- ми задамо рівняння

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= -\frac{(u_+ + u_-) \cos(\pi\alpha/2)}{\sqrt{u_+^2 + u_-^2 + 2 \cos(\pi\alpha) u_+ u_-}}, \\ \sin \varphi &= -\frac{(u_+ - u_-) \sin(\pi\alpha/2)}{\sqrt{u_+^2 + u_-^2 + 2 \cos(\pi\alpha) u_+ u_-}}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

які слідують із співвідношень (2.34). Розв'язки цих рівнянь мають таких же вид як і (3.17), а тому параметри ϕ_+ та ϕ_- також знаходяться із виразу (3.18). Тим не менш, так як $\arctan[|\epsilon| \tan(\pi\alpha/2)] \in (\pi\alpha/2 - \pi, 0)$, то, на відміну від попереднього випадку, ми маємо $\pi(\alpha - 1) < \phi_+ < \pi\alpha/2$, $\pi\alpha/2 < \phi_- < \pi$ і $\phi_+ < \phi_-$.

3.1.2. Представлення у вигляді перетворення Лапласа

Для знаходження граничної густини ймовірності в термінах перетворення Лапласа в рівнянні (3.8) ми зробимо заміну змінної інтегрування $\eta = (1 - r)/\alpha$ і використаємо інтегральне представлення гамма-функції $\Gamma(r) = \int_0^\infty dz e^{-z} z^{r-1}$ ($\operatorname{Re} r > 0$) [309]. Звідси безпосередньо слідує

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\eta \Gamma(1 - \alpha\eta) \frac{\sin[\phi(y)\eta]}{\sin(\pi\eta)} |y|^{\alpha\eta-1} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty dz e^{-z} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\eta \frac{\sin[\phi(y)\eta]}{|y| \sin(\pi\eta)} \left(\frac{z^\alpha}{|y|^\alpha}\right)^{-\eta} \end{aligned} \quad (3.21)$$

($0 < c < \min\{1, 1/\alpha\}$). Далі, використовуючи співвідношення [310]

$$\frac{1}{2i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\eta \frac{\sin(\vartheta\eta)}{\sin(\pi\eta)} z^{-\eta} = \frac{\sin \vartheta z}{1 + 2 \cos \vartheta z + z^2} \quad (3.22)$$

($-\pi < \vartheta < \pi$) і роблячи у виразі (3.21) заміну змінної $x = z/|y|$, ми знаходимо шукане представлення граничної густини ймовірності

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dx e^{-|y|x} \frac{\sin[\phi(y)]x^\alpha}{1 + 2 \cos[\phi(y)]x^\alpha + x^{2\alpha}}. \quad (3.23)$$

Відмітимо, що хоча вираз (3.22) непридатний для $\vartheta = \pi$, рівняння (3.23) при $\phi(y) = \pi$ дає правильний результат, якщо $\mathcal{P}(y)|_{\phi(y)=\pi}$ інтерпретувати як границю $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \mathcal{P}(y)|_{\phi(y)=\pi-\zeta}$.

Гранична густина ймовірності $\mathcal{P}(y)$ у вигляді (3.23) зручна для визначення багатьох цікавих нам властивостей розглядуваних блукань. Зокрема, із цього

представлення слідує, що $\mathcal{P}(y) \geq 0$, тобто функція $\mathcal{P}(y)$ дійсно є густинуо ймовірності. Крім того, маємо $d\mathcal{P}(y)/d|y| \leq 0$ ($y \neq 0$) і $\max \mathcal{P}(y) = \mathcal{P}(0)$, а значить розподіл $\mathcal{P}(y)$ є унімодальним. Більш того, в силу експоненціального множника в підінтегральній функції, представлення (3.23) найбільш зручне для знаходження $\mathcal{P}(y)$ при великих значеннях $|y|$.

З метою спрощення отриманого виразу для $\mathcal{P}(y)$ у формі перетворення Лапласа нижче ми знову окремо розглянемо чотири можливі випадки, що були представлені в підрозділі 3.1.1, та запишемо їх у більш простому вигляді.

1) $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha_+ \neq \alpha_-$

У цьому випадку, виходячи із виразів (3.11) і (3.23), отримуємо

$$\mathcal{P}(y) = \frac{H(\sigma y)}{\pi} \int_0^\infty dx e^{-|y|x} \frac{\sin(\phi_+)x^\alpha}{1 + 2\cos(\phi_+)x^\alpha + x^{2\alpha}} \quad (3.24)$$

із $\phi_+ = \pi\alpha$. Так як при $y = 0$ даний інтеграл розходиться, то $\mathcal{P}(y)|_{\sigma y \rightarrow +0} = \infty$. Далі на основі стандартного інтегралу [305]

$$\int_0^\infty dz \frac{z^{\nu-1}}{1 + 2\cos\vartheta z + z^2} = \frac{\pi \sin[\vartheta(1-\nu)]}{\sin\vartheta \sin(\pi\nu)} \quad (3.25)$$

($0 < |\vartheta| < \pi$, $0 < \nu < 2$), приймаючи до уваги, що при $\nu = 1$ права частина рівняння (3.25) рівна $\vartheta/\sin\vartheta$, легко встановити, що умова нормування для $\mathcal{P}(y)$ зберігається

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty dy \mathcal{P}(y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\sin(\pi\alpha)x^{\alpha-1}}{1 + 2\cos(\pi\alpha)x^\alpha + x^{2\alpha}} \\ &= \frac{1}{\pi\alpha} \int_0^\infty dz \frac{\sin(\pi\alpha)}{1 + 2\cos(\pi\alpha)z + z^2} = 1. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Головна особливість цієї граничної густини ймовірності полягає в її односторонності, а саме: $\mathcal{P}(y) = 0$ при $y > 0$, якщо $\alpha_+ > \alpha_-$; або при $y < 0$, якщо $\alpha_- > \alpha_+$. Отже, розподіл частинок буде зосереджений на тій піввісі, для якої хвостової індекс є найменшим, тобто ймовірність здійснити дуже довгий

стрибок вища. При цьому підкреслимо, що загальна ймовірність стрибка в даному напрямку $W_{\text{sgn}(\sigma)} = \int_0^\infty d\xi w[\text{sgn}(\sigma)\xi]$ може бути меншою, ніж ймовірність $W_{-\text{sgn}(\sigma)} = 1 - W_{\text{sgn}(\sigma)}$ стрибка у протилежному. Однак більш важкі хвости при великих значеннях часу призводять до концентрації розподілу частинок саме в їх напрямку. Поведінку граничної густини ймовірності при $\alpha \in (0, 1)$ та $\alpha_+ \neq \alpha_-$ представлено на рисунку 3.1.

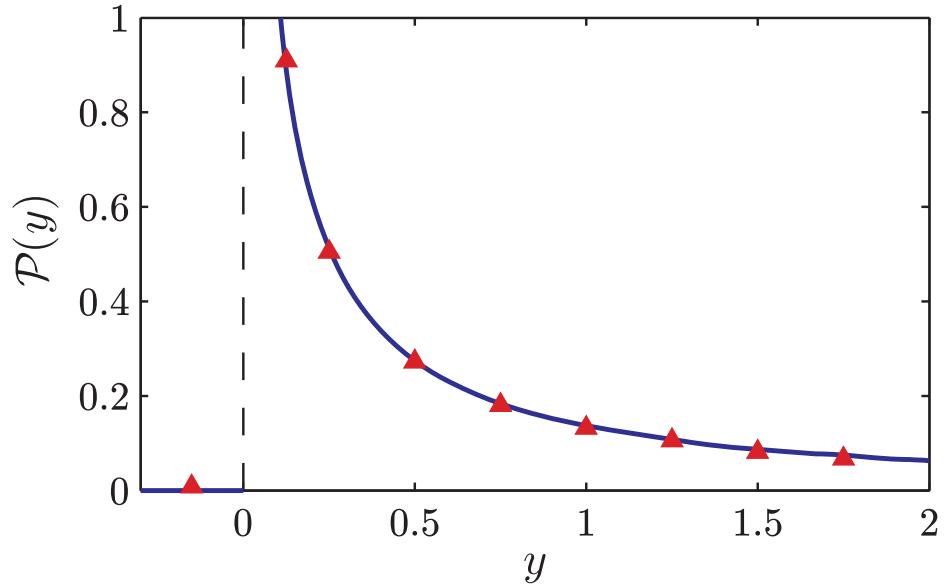


Рис. 3.1. Гранична густина ймовірності при $\alpha_+ = \alpha = 1/2$ і $\alpha_- > \alpha_+$. Суцільна лінія показує аналітичну поведінку (3.24), а результати числового моделювання показано трикутниками.

2) $\alpha \in (1, 2)$, $\alpha_+ \neq \alpha_-$, $l_1 = 0$

У цій ситуації гранична густина ймовірності має вигляд

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y) &= \frac{H(\sigma y)}{\pi} \int_0^\infty dx e^{-|y|x} \frac{\sin(\phi_+) x^\alpha}{1 + 2 \cos(\phi_+) x^\alpha + x^{2\alpha}} \\ &\quad + H(-\sigma y) \frac{1}{\alpha} e^{-|y|}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

де $\phi_+ = \pi(\alpha - 1)$. За допомогою рівняння (3.25) можна показати, що $\mathcal{P}(y)$

нормована і

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(y)|_{\sigma y \rightarrow +0} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\sin(\phi_+) x^\alpha}{1 + 2 \cos(\phi_+) x^\alpha + x^{2\alpha}} \\
 &= \frac{1}{\pi \alpha} \int_0^\infty dz \frac{\sin(\phi_+) z^{1/\alpha}}{1 + 2 \cos(\phi_+) z + z^2} \\
 &= \frac{\sin(\phi_+/\alpha)}{\alpha \sin(\pi/\alpha)}. \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

Оскільки $\phi_+ = \pi(\alpha - 1)$, то, враховуючи вираз (3.27), отримуємо

$$\mathcal{P}(0) = \mathcal{P}(y)|_{\sigma y \rightarrow \pm 0} = \frac{1}{\alpha}. \tag{3.29}$$

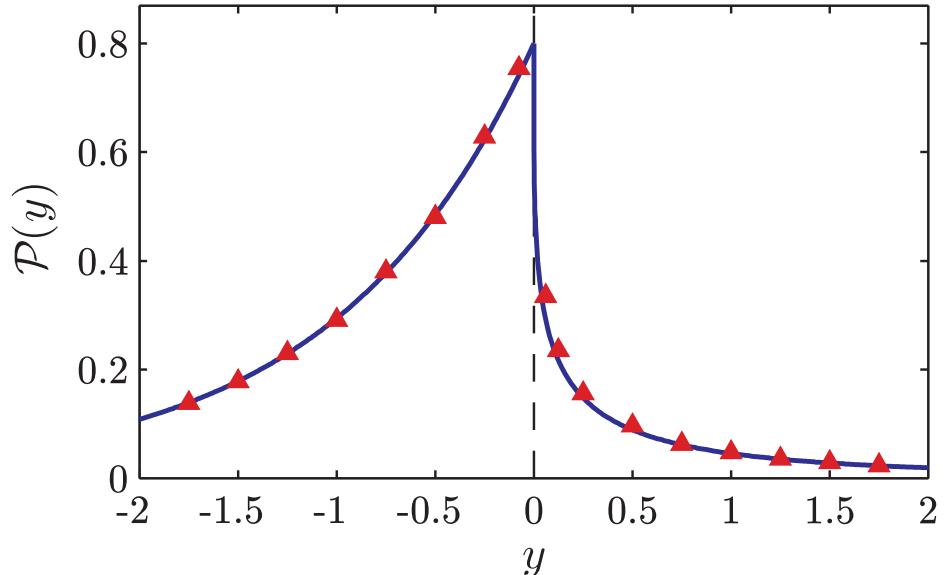


Рис. 3.2. Гранична густина ймовірності при $\alpha_+ = \alpha = 5/4$ і $\alpha_- > \alpha_+$. Суцільна лінія показує аналітичні результати, отримані із формулі (3.27), а трикутники відповідають числовим результатам.

Таким чином, у цьому випадку гранична густина ймовірності буде двосторонньою. При чому одна гілка $\mathcal{P}(y)$ (ліва при $\alpha_- > \alpha_+$ або права при $\alpha_+ > \alpha_-$) буде чисто експоненціальною, а друга мати важкий хвіст (див. розділ 3.2). Відмітимо, що важка гілка $\mathcal{P}(y)$ буде на тій піввісі, де хвостової індекс густини $w(\xi)$ величини стрибка найменші. Проте, ймовірність $\int_0^\infty dy \mathcal{P}[-\text{sgn}(\sigma)y] = 1/\alpha$ того, що $\sigma Y(\infty) < 0$, тобто ймовірність, що відповідає експоненціальній гілці, буде завжди більша за $1/2$. Рисунок 3.2 показує

поведінку густини ймовірності $\mathcal{P}(y)$ у даному випадку.

3) $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (0, 1)$, $u_+ \neq u_-$

Із виразів (3.19) та (3.23) знаходимо

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y) &= \frac{H(\epsilon y)}{\pi} \int_0^\infty dx e^{-|y|x} \frac{\sin(\phi_+)x^\alpha}{1 + 2\cos(\phi_+)x^\alpha + x^{2\alpha}} \\ &\quad + \frac{H(-\epsilon y)}{\pi} \int_0^\infty dx e^{-|y|x} \frac{\sin(\phi_-)x^\alpha}{1 + 2\cos(\phi_-)x^\alpha + x^{2\alpha}}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

де параметри ϕ_+ і ϕ_- даються рівнянням (3.18). Виходячи із умови $\alpha < 1$, неважко встановити, що $\mathcal{P}(0) = \infty$. І, знову використовуючи формулу (3.25), можна перевірити нормованість $\mathcal{P}(y)$.

Порівняння з першим випадком показує, що при $\alpha_+ \neq \alpha_-$ спостерігається сильна асиметрія (односторонній розподіл) густини ймовірності $\mathcal{P}(y)$, у той час як за умови $\alpha_+ = \alpha_-$ при $u_+ \neq u_-$ розподіл буде менш асиметричним і двостороннім. Згідно з (3.30) у даному випадку обидві гілки граничної густини ймовірності будуть мати важкі хвости з тим же хвостовим параметром α , що й відповідна густина ймовірності величини стрибка (див. розділ 3.2). Поведінка розподілу $\mathcal{P}(y)$ для цієї ситуації показана на рисунку 3.3.

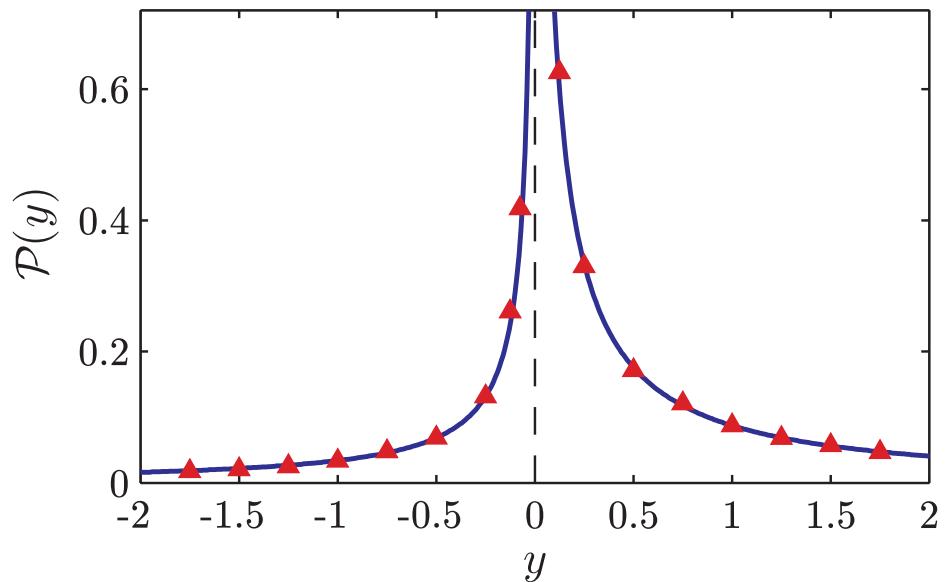


Рис. 3.3. Гранична густина ймовірності при $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha = 1/2$ і $\epsilon = 1/3$. Суцільна лінія показує аналітичну густину, отриману із формулами (3.30), а трикутники відповідають результатам числового моделювання.

4) $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (1, 2)$, $u_+ \neq u_-$, $l_1 = 0$

Як і в попередньому випадку гранична густина ймовірності і параметри ϕ_+ та ϕ_- задаються рівняннями (3.30) і (3.18) відповідно. Важливою відмінністю є той факт, що в цей раз $\mathcal{P}(0) < \infty$. Щоб показати чому дорівнює $\mathcal{P}(0)$ ми використаємо вираз (3.30) та інтеграл (3.25), звідки отримаємо

$$\mathcal{P}(y)|_{\epsilon y \rightarrow \pm 0} = \frac{\sin(\phi_\pm/\alpha)}{\alpha \sin(\pi/\alpha)}. \quad (3.31)$$

Опираючись на співвідношення (3.18), знаходимо $\sin(\phi_+/\alpha) = \sin(\phi_-/\alpha)$, а значить $\mathcal{P}(y)|_{\epsilon y \rightarrow \pm 0} = \mathcal{P}(0)$, де

$$\mathcal{P}(0) = \frac{1}{\alpha \sin(\pi/\alpha)} \cos \left\{ \frac{1}{\alpha} \arctan \left[|\epsilon| \tan \left(\frac{\pi \alpha}{2} \right) \right] \right\}. \quad (3.32)$$

Порівнюючи цей результат із другим випадком, ми знову помічаємо, що при $\alpha_+ \neq \alpha_-$ поведінка правої та лівої гілки $\mathcal{P}(y)$ буде сильніше відрізнятися між собою, ніж при різних $u_+ \neq u_-$, але рівності хвостових параметрів $\alpha_+ = \alpha_-$. Для цього випадку поведінка густини $\mathcal{P}(y)$ показана на рисунку 3.4.

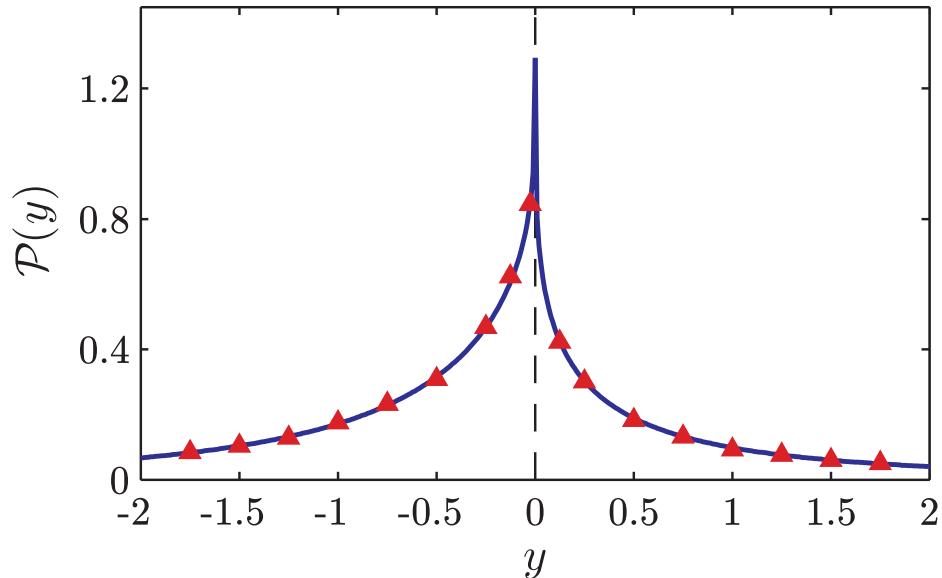


Рис. 3.4. Гранична густина ймовірності при $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha = 5/4$ і $\epsilon = (\sqrt{2}-1)/(\sqrt{2}+1)$. Суцільна лінія і трикутники показують аналітичні та числові результати відповідно.

3.1.3. Представлення у вигляді H -функцій Фокса

H -функції Фокса є одними із найбільш загальних спеціальних функцій (тобто дуже багато елементарних та спеціальних функцій являються їх частковими випадками), чиї основні властивості добре вивчені [311]. Зазначені функції, крім того, грають значну роль у вивчені аномальних транспортних процесів [29, 30, 312]. Враховуючи цей факт, доречно знайти представлення граничної густини ймовірності в термінах цих функцій.

Для знаходження такого представлення ми спочатку використаємо відому формулу Ейлера [309] $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$, із якої слідує

$$\frac{\sin[\phi(y)\frac{1-r}{\alpha}]}{\sin(\pi\frac{1-r}{\alpha})} = \frac{\Gamma(\frac{1-r}{\alpha})\Gamma(1-\frac{1-r}{\alpha})}{\Gamma[\phi(y)\frac{1-r}{\pi\alpha}]\Gamma[1-\phi(y)\frac{1-r}{\pi\alpha}]} \quad (3.33)$$

Далі, підставляючи останній вираз в формулу (3.8), знаходимо

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{2\pi i\alpha} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dr \frac{\Gamma(r)\Gamma(\frac{1-r}{\alpha})\Gamma(1-\frac{1-r}{\alpha})}{\Gamma[\phi(y)\frac{1-r}{\pi\alpha}]\Gamma[1-\phi(y)\frac{1-r}{\pi\alpha}]} |y|^{-r}. \quad (3.34)$$

Тепер врахуємо, що H -функції можуть бути задані за допомогою інтегралу Мелліна-Барнса [311]

$$\begin{aligned} H_{p,q}^{m,n} \left[y \middle| \begin{matrix} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{matrix} \right] &= H_{p,q}^{m,n} \left[y \middle| \begin{matrix} (a_1, A_1), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), \dots, (b_q, B_q) \end{matrix} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L dr \Theta_r y^{-r}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

де

$$\Theta_r = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + B_j r) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - A_j r)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - B_j r) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + A_j r)}. \quad (3.36)$$

Тут m, n, p, q – цілі числа, $0 \leq m \leq q$, $0 \leq n \leq p$, a_j і b_j – дійсні або комплексні числа, $A_j, B_j > 0$, L – підходячий контур в комплексній r -площині,

який відділяє полюси гамма-функцій $\Gamma(b_j + B_j r)$ від полюсів $\Gamma(1 - a_j - A_j r)$. Зауважимо, що пустий добуток вважається рівним 1.

Тоді, порівнюючи рівняння (3.36) із підінтегральною функцією в виразі (3.34), приходимо до висновку, що гранична густина $\mathcal{P}(y)$ може бути представлена через H -функції наступним чином

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{\alpha} H_{2,3}^{2,1} \left[|y| \left| \begin{array}{l} (1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}), (1 - \frac{\phi(y)}{\pi\alpha}, \frac{\phi(y)}{\pi\alpha}) \\ (0, 1), (1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}), (1 - \frac{\phi(y)}{\pi\alpha}, \frac{\phi(y)}{\pi\alpha}) \end{array} \right. \right]. \quad (3.37)$$

Використовуючи цю загальну формулу, неважко знайти відповідне представлення для усіх чотирьох обговорюваних раніше випадків. Для прикладу ми зосередимо увагу на першому із них, тобто для $\alpha \in (0, 1)$ при $\alpha_+ \neq \alpha_-$, оскільки в цьому випадку результат (3.37) може бути суттєво спрощений. Справді, так як в цій ситуації $\phi(y) = \phi_{\text{sgn}(\sigma y)}$ і $\phi_+ = \pi\alpha$ і $\phi_- = 0$, то із рівняння (3.37) з урахуванням співвідношення [311]

$$\begin{aligned} & H_{p,q}^{m,n} \left[y \left| \begin{array}{l} (a_1, A_1), \dots, (a_{p-1}, A_{p-1}), (b_1, B_1) \\ (b_1, B_1), \dots, (b_q, B_q) \end{array} \right. \right] \\ &= H_{p-1,q-1}^{m-1,n} \left[y \left| \begin{array}{l} (a_1, A_1), \dots, (a_{p-1}, A_{p-1}) \\ (b_2, B_2), \dots, (b_q, B_q) \end{array} \right. \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

($m \geq 1, p > n$) слідує

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y) &= \frac{H(\sigma y)}{\alpha} H_{2,3}^{2,1} \left[|y| \left| \begin{array}{l} (1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}), (0, 1) \\ (0, 1), (1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}), (0, 1) \end{array} \right. \right] \\ &= \frac{H(\sigma y)}{\alpha} H_{1,2}^{1,1} \left[|y| \left| \begin{array}{l} (1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}) \\ (1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}), (0, 1) \end{array} \right. \right]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Приймемо до уваги наступну властивість H -функцій Фокса

$$H_{p,q}^{m,n} \left[y \begin{array}{c} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{array} \right] = \frac{\chi}{y^{\lambda\chi}} H_{p,q}^{m,n} \left[y^\chi \begin{array}{c} (a_p + \lambda\chi A_p, \chi A_p) \\ (b_q + \lambda\chi B_q, \chi B_q) \end{array} \right] \quad (3.40)$$

($\chi > 0, -\infty < \lambda < \infty$). Поклавши $\chi = \alpha$ і $\lambda = 1/\alpha - 1$, рівняння (3.39) зведеться до вигляду

$$\mathcal{P}(y) = \frac{H(\sigma y)}{|y|^{1-\alpha}} H_{1,2}^{1,1} \left[|y|^\alpha \begin{array}{c} (0, 1) \\ (0, 1), (1 - \alpha, \alpha) \end{array} \right]. \quad (3.41)$$

Помічаємо, що остання H -функція являється узагальненою функцією Міттаг-Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$ [311, 313, 314], а саме

$$H_{1,2}^{1,1} \left[-z \begin{array}{c} (0, 1) \\ (0, 1), (1 - \beta, \alpha) \end{array} \right] = E_{\alpha,\beta}(z) \quad (3.42)$$

($\alpha, \beta > 0$). Таким чином, гранична густина ймовірності в данному випадку спрощується до вигляду

$$\mathcal{P}(y) = \frac{H(\sigma y)}{|y|^{1-\alpha}} E_{\alpha,\alpha}(-|y|^\alpha). \quad (3.43)$$

Зручність цього результату пов'язана з тим, що функція Міттаг-Леффлера дуже добре вивчена. Зокрема, використовуючи представлення цієї функції у вигляді ряду $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n / \Gamma(\alpha n + \beta)$, отримуємо

$$\mathcal{P}(y) = \frac{H(\sigma y)}{|y|^{1-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n |y|^{\alpha n}}{\Gamma[\alpha(n+1)]}. \quad (3.44)$$

Відмітимо, що гранична густина ймовірності (3.43) при $\alpha = 1/2$ може бути зведена до дуже простої форми. Для цього врахуємо відому формулу

$$E_{\alpha,\alpha}(-|y|^\alpha) = -|y|^{1-\alpha} \frac{d}{d|y|} E_{\alpha,1}(-|y|^\alpha). \quad (3.45)$$

Це співвідношення слідує безпосередньо із представлення функції Міттаг-Леффлера у вигляді ряду. Далі на основі відомого результату [313] $E_{1/2,1}(-z) = e^{z^2} \operatorname{erfc}(z)$, де $\operatorname{erfc}(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_z^\infty dx e^{-x^2}$ – додаткова функція помилок, рівняння (3.43) при $\alpha = 1/2$ приймає просту форму

$$\mathcal{P}(y) = H(\sigma y) \left[\frac{1}{\sqrt{\pi|y|}} - e^{|y|} \operatorname{erfc}(\sqrt{|y|}) \right]. \quad (3.46)$$

Графік цієї густини ймовірності показаний на рисунку 3.1.

3.1.4. Представлення у вигляді степеневого ряду

Для повноти дослідження альтернативних форм граничної знайдемо також її представлення у вигляді степеневого ряду. У зв'язку із швидкою збіжністю таке подання виявляється особливо зручним для числового знаходження густини $\mathcal{P}(y)$. Вихідним пунктом буде використання граничної густини ймовірності в термінах оберненого перетворення Мелліна $\mathcal{P}(y) = (2\pi i)^{-1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\eta S(\eta)$, де

$$S(\eta) = \Gamma(1 - \alpha\eta) \frac{\sin[\phi(y)\eta]}{\sin(\pi\eta)} |y|^{\alpha\eta-1} \quad (3.47)$$

(див. рівняння (3.21)).

Для знаходження цього інтегралу ми замкнемо контур інтегрування півколою C_R із радіусом R , яке лежить в правій напівплощіні для комплексної змінної η . Вважаємо, що це півколо не перетинає жодну точку сингулярності $S(\eta)$. Тоді, спрямовуючи радіус R до нескінченості, на основі формули Стірлінга для гамма-функції [309] можна показати, що інтеграл по контуру C_R буде прямувати до нуля. А значить згідно з теоремою про лишки (див., наприклад, [315]), ми маємо $\mathcal{P}(y) = -\sum_j \operatorname{Res}(S, \eta_j)$, де $\operatorname{Res}(S, \eta_j)$ означає лишок $S(\eta)$ при $\eta = \eta_j$, а сума береться по всім полюсам функції $S(\eta)$ всередині контуру L . Знак “–” перед сумою виникає через напрямок контуру L .

Згідно з рівнянням (3.47) полюси $S(\eta)$ являються наслідком простих по-

люсів $\eta_n = n/\alpha$ ($n \geq 1$) гамма-функції $\Gamma(1 - \alpha\eta)$ і простих полюсів $\eta_m = m$ ($m \geq 1$) функції $1/\sin(\pi\eta)$. Якщо параметр α буде ірраціональним, то множини полюсів $\{\eta_n\}$ та $\{\eta_m\}$ не перетинаються, а значить всі полюси $S(\eta)$ також будуть простими. В той же час, якщо α – раціональне число, то деякі (або всі) при $\alpha = 1$ полюси із множини $\{\eta_n\}$ будуть співпадати з деякими (або всіма) полюсами із множини $\{\eta_m\}$. А значить в таких точках співпадання функція $S(\eta)$ буде мати полюси другого порядку. Через цю відмінність для ірраціональних та раціональних значень параметру α , ми розглянемо дані ситуації окремо.

Ірраціональні значення α

У даному випадку гранична густина ймовірності записується у вигляді $\mathcal{P}(y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}(S, n/\alpha) - \sum_{m=1}^{\infty} \text{Res}(S, m)$. Таким чином, приймаючи до уваги формули $\Gamma(1 - \alpha\eta)|_{\eta=n/\alpha+\xi} \sim (-1)^n / [\alpha\Gamma(n)\xi]$ та $1/\sin(\pi\eta)|_{\eta=m+\xi} \sim (-1)^m / (\pi\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$, а також використовуючи формулу відображення Ейлера $\Gamma(1 - \alpha m) = \pi / [\Gamma(\alpha m) \sin(\pi\alpha m)]$, ми знаходимо степеневий ряд

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y) &= \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin[\phi(y)n/\alpha]}{\Gamma(n) \sin(\pi n/\alpha)} |y|^{n-1} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} \sin[\phi(y)m]}{\Gamma(\alpha m) \sin(\pi\alpha m)} |y|^{\alpha m-1}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Раціональні значення α

Якщо хвостовий параметр α буде раціональним числом, тобто дається нескоротним дробом $\alpha = l/p$, де $l \geq 1$ і $p \geq 1$ – натуральні числа, які задовольняють умову $l \leq 2p$, то прості полюси $\Gamma(1 - p\eta/l)$ з порядковими номерами $n = lk$ ($k = \overline{1, \infty}$) і прості полюси $1/\sin(\pi\eta)$ з номерами $m = pk$ співпадають. А тому функція $S(\eta)$ при $\eta = pk$ буде мати полюси другого порядку. Виходячи

із цього, зручно представити граничну густину ймовірності у формі

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y) = & -\sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq l, 2l, \dots)}}^{\infty} \text{Res}(S, pn/l) - \sum_{\substack{m=1 \\ (m \neq p, 2p, \dots)}}^{\infty} \text{Res}(S, m) \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \text{Res}(S, pk), \end{aligned} \quad (3.49)$$

де остання сума включає в себе лишки $S(k)$ в полюсах другого порядку. Використовуючи приведені вище результати для простих полюсів $S(\eta)$ і асимптотичну формулу [309], при $\xi \rightarrow 0$ знаходимо

$$\Gamma(1 - l\eta/p)|_{\eta=pk+\xi} \sim (-1)^{lk}(p/l)[\xi^{-1} - (l/p)\psi(lk)]/\Gamma(lk), \quad (3.50)$$

де $\psi(x) = d \ln \Gamma(x)/dx$ – дігамма-функція. Як наслідок, із виразу (3.49) отримаємо ряд

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y) = & \frac{p}{l} \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq l, 2l, \dots)}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin[\phi(y)pn/l]}{\Gamma(n) \sin(\pi pn/l)} |y|^{n-1} \\ & + \sum_{\substack{m=1 \\ (m \neq p, 2p, \dots)}}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} \sin[\phi(y)m]}{\Gamma(lm/p) \sin(\pi lm/p)} |y|^{lm/p-1} \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{pk+lk}}{\Gamma(lk)} \left([\psi(lk) - \ln |y|] \sin[\phi(y)pk] \right. \\ & \left. - \frac{p}{l} \phi(y) \cos[\phi(y)pk] \right) |y|^{lk-1}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Зауважимо, якщо $\alpha \in (0, 1)$ і $\alpha_+ \neq \alpha_-$, то функція $\phi(y)$ дається рівнянням (3.10). В цьому випадку вирази (3.48) і (3.51) зводяться до (3.44), а значить і до (3.43), іншими словами виражуються за допомогою функції Міттаг-Леффлера. Якщо $\alpha \in (1, 2)$ і $\alpha_+ \neq \alpha_-$, то $\mathcal{P}(y)$ також може бути виражена в термінах функції Міттаг-Леффлера. Справді, використовуючи означення (3.12), а також співвідношення $\sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n |y|^n / n! = e^{\pm|y|}$ та

$\sum_{n=1}^{\infty} |y|^{\alpha n}/\Gamma(\alpha n) = E_{\alpha,0}(|y|^\alpha) = |y|^\alpha E_{\alpha,\alpha}(|y|^\alpha)$, рівняння (3.48) і (3.51) легко привести до наступного вигляду

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(y) &= H(\sigma y) \left(\frac{e^{|y|}}{\alpha} - |y|^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(|y|^\alpha) \right) \\ &\quad + H(-\sigma y) \frac{e^{-|y|}}{\alpha}.\end{aligned}\tag{3.52}$$

Відмітимо, що у зв'язку із тим, що знаменники отриманих рядів містять гамма-функції, вони будуть швидко збігатися, а тому є зручними для числових розрахунків. Крім того, звернемо увагу на суттєву відмінність в розкладах (3.48) і (3.51), а саме – перший ряд містить тільки степеневі функції, у той час як другий і логарифмічну.

3.2. Поведінка граничних розподілів при малих та великих значеннях масштабованої змінної

Асимптотична поведінка при малих значеннях $|y|$ граничної густини ймовірності $\mathcal{P}(y)$ повністю описується розкладами (3.48) і (3.51). У той час, як для опису асимптотичної поведінки $\mathcal{P}(y)$ при великих $|y|$, зручно використовувати представлення граничної густини у вигляді перетворення Лапласа (3.23). У відповідності з лемою Ватсона [315] асимптотика $\mathcal{P}(y)$ при $|y| \rightarrow \infty$ буде завдаватися розкладом функції $\sin[\phi(y)]x^\alpha/(1 + 2\cos[\phi(y)]x^\alpha + x^{2\alpha})$ при $x \rightarrow \infty$. Отже, використовуючи вираз [316]

$$\frac{\sin[\phi(y)]x^\alpha}{1 + 2\cos[\phi(y)]x^\alpha + x^{2\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin[\phi(y)n]x^{\alpha n}\tag{3.53}$$

($|x| < 1$) і відомий інтеграл [305]

$$\int_0^{\infty} dx e^{-|y|x} x^{\alpha n} = \frac{\Gamma(1 + \alpha n)}{|y|^{1+\alpha n}},\tag{3.54}$$

із рівняння (3.23) при $|y| \rightarrow \infty$ маємо асимптотичний розклад

$$\mathcal{P}(y) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin[\phi(y)n] \frac{\Gamma(1+\alpha n)}{|y|^{1+\alpha n}}. \quad (3.55)$$

Далі для зручності для чотирьох виділених вище випадків густини ймовірності $\mathcal{P}(y)$ ми приведемо її асимптотику при $|y| \rightarrow 0$ і $|y| \rightarrow \infty$ із урахуванням лише головних членів.

1) $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha_+ \neq \alpha_-$

У даному випадку двозначна функція $\phi(y)$ дається виразом (3.10), також $\mathcal{P}(y)|_{\sigma y < 0} = 0$, а тому рівняння (3.44) і (3.55) приводять відповідно до виразів

$$\mathcal{P}(y)|_{\sigma y > 0} \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{|y|^{1-\alpha}} \quad (3.56)$$

при $|y| \rightarrow 0$ та

$$\mathcal{P}(y)|_{\sigma y > 0} \sim \frac{1}{\pi} \sin(\pi\alpha) \Gamma(1 + \alpha) \frac{1}{|y|^{1+\alpha}} \quad (3.57)$$

$|y| \rightarrow \infty$.

2) $\alpha \in (1, 2)$, $\alpha_+ \neq \alpha_-, l_1 = 0$.

За цих умов функція $\phi(y)$ задається виразом (3.12), і з урахуванням того факту, що $\mathcal{P}(y)|_{\sigma y < 0} = e^{-|y|}/\alpha$, із рівнянь (3.48), (3.51) і (3.55) ми знаходимо

$$\mathcal{P}(y)|_{\sigma y > 0} \sim \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} |y|^{\alpha-1} \quad (3.58)$$

при $|y| \rightarrow 0$ та

$$\mathcal{P}(y)|_{\sigma y > 0} \sim -\frac{1}{\pi} \sin(\pi\alpha) \Gamma(1 + \alpha) \frac{1}{|y|^{1+\alpha}} \quad (3.59)$$

при $|y| \rightarrow \infty$.

3) $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (0, 1)$, $u_+ \neq u_-$

У цьому разі, використовуючи (3.18), неважко отримати формулу

$$\mathcal{P}(y) \sim \frac{1 + \operatorname{sgn}(\epsilon y)|\epsilon|}{2\Gamma(\alpha)\sqrt{\epsilon^2 + (1 - \epsilon^2)\cos^2(\pi\alpha/2)}} \frac{1}{|y|^{1-\alpha}} \quad (3.60)$$

при $|y| \rightarrow 0$ та

$$\mathcal{P}(y) \sim \frac{[1 + \operatorname{sgn}(\epsilon y)|\epsilon|] \sin(\pi\alpha)\Gamma(1+\alpha)}{2\pi\sqrt{\epsilon^2 + (1 - \epsilon^2)\cos^2(\pi\alpha/2)}} \frac{1}{|y|^{1+\alpha}} \quad (3.61)$$

при $|y| \rightarrow \infty$. Тут, на відміну від першого випадку, гранична густина ймовірності є двосторонньою і має лівий та правий хвіст з однаковим хвостовим параметром α .

4) $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (1, 2)$, $u_+ \neq u_-$, $l_1 = 0$

І, нарешті, у цій ситуації, знову приймаючи до уваги вираз (3.18), маємо

$$\mathcal{P}(y) \sim \mathcal{P}(0) - \frac{1 + \operatorname{sgn}(\epsilon y)|\epsilon|}{2\Gamma(\alpha)\sqrt{\epsilon^2 + (1 - \epsilon^2)\cos^2(\pi\alpha/2)}} |y|^{\alpha-1} \quad (3.62)$$

при $|y| \rightarrow 0$ та

$$\mathcal{P}(y) \sim -\frac{[1 + \operatorname{sgn}(\epsilon y)|\epsilon|] \sin(\pi\alpha)\Gamma(1+\alpha)}{2\pi\sqrt{\epsilon^2 + (1 - \epsilon^2)\cos^2(\pi\alpha/2)}} \frac{1}{|y|^{1+\alpha}} \quad (3.63)$$

при $|y| \rightarrow \infty$.

Відмітимо, що при $\epsilon = 0$ вирази (3.60)–(3.63) відповідають також і симетричним блуканням. Як видно із отриманих формул, у всіх чотирьох приведених вище випадках гранична густина ймовірності $\mathcal{P}(y)$ при $|y| \rightarrow \infty$ буде характеризуватися важкими хвостами з тим же хвостовим параметром α , що і мінімальний хвостовий індекс для розподілу $w(\xi)$ величини стрибка. Значить для цих функцій момент другого порядку не існує при $\alpha \in (0, 2]$, а момент першого порядку не існує, якщо $\alpha \in (0, 1]$. Таким чином, дисперсія положення $Y(t)$ в цих випадках дійсно є нескінченною при будь-яких t .

3.3. Асимптотична поведінка густин ймовірності оригінального положення випадкових блукань у режимі рідкісних флуктуацій

Ситуації одно- або двосторонніх експоненціальних розподілів граничних густин ймовірності $\mathcal{P}(y)$ цікаві тим, що при великих значеннях часу для них не можна коректно перейти до оригінальної густини ймовірності $P(x, t)$ у відповідності із співвідношенням $P(x, t) \sim a(t)\mathcal{P}[a(t)x]$. Причиною цього є те, що у границі $t \rightarrow \infty$ вклад в виразі (2.17), із якого ми отримуємо $\mathcal{P}(y)$, роблять головні члени розкладу $1 - w_k$, що є аналітичними та не відображають факт важких хвостів $w(\xi)$. Зазначений перехід від $\mathcal{P}(y)$ до $P(x, t)$ буде справедливим тільки в центральній області просторової координати x , для якої $|x| \propto O[1/a(t)]$. А ось характер поведінки хвостів $P(x, t)$ (які мають бути такими, щоб дисперсія $X(t)$ являлась нескінченною при будь-яких t) при $|x| \gg O[1/a(t)]$ нам необхідно знайти додатково, врахувавши наступні неаналітичні члени розкладу $1 - w_k$. При цьому підкреслимо, що в інших ситуаціях, коли хвости $\mathcal{P}(y)$ є важкими, описаний перехід від $\mathcal{P}(y)$ до $P(x, t)$ є коректним, оскільки вклад важких хвостів $w(\xi)$ враховано.

Будемо виходити з виразу (2.17), із якого слідує, що при $t \rightarrow \infty$ і $x \neq 0$ має місце формула

$$P(x, t) \sim \frac{V(t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{-ikx}}{V(t) + 1 - w_k}. \quad (3.64)$$

Однак тепер нас буде цікавити не масштабований певним чином граничний розподіл, що явним чином не залежить від часу, а асимптотична поведінка $P(x, t)$ при великих значеннях часу та $|x| \rightarrow \infty$. Згідно із результатами підрозділу 2.2, ми маємо чотири випадки експоненціальної поведінки граничних розподілів $\mathcal{P}(y)$, опишемо нижче окремо кожен із них.

1) $l_1 \neq 0, \alpha \in (1, 2)$

У даному випадку при $k \rightarrow 0$ очевидно справедлива наступна асимптотика

$$1 - w_k \sim -il_1k + q \left[1 - i\beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \operatorname{sgn}(k) \right] |k|^\alpha, \quad (3.65)$$

де величина q дається формулою (2.29), а параметр

$$\beta = \frac{u_+\delta_{\alpha\alpha_+} - u_-\delta_{\alpha\alpha_-}}{u_+\delta_{\alpha\alpha_+} + u_-\delta_{\alpha\alpha_-}}. \quad (3.66)$$

Підставляючи рівняння (3.65) в (3.64) і роблячи заміну змінної інтегрування $k|x| = \kappa$, отримаємо

$$\begin{aligned} P(x, t) \sim & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{|x|} e^{-ik'\operatorname{sgn}(x)} \left\{ 1 - i \frac{l_1}{|x|V(t)} \kappa \right. \\ & \left. + \frac{q}{|x|^\alpha V(t)} \left[1 - i\beta \operatorname{sgn}(\kappa) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right] |\kappa|^\alpha \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Неважко побачити, що при $|x|V(t) \rightarrow \infty$ (тобто $|x| \gg O[1/a(t)]$, це випливає із умови $a(t) \sim V(t)/|l_1|$) має місце наступне асимптотичне співвідношення

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 - i \frac{l_1}{|x|V(t)} \kappa + \frac{q}{|x|^\alpha V(t)} \left[1 - i\beta \operatorname{sgn}(\kappa) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right] |\kappa|^\alpha \right\}^{-1} \\ & \sim \exp \left\{ i \frac{l_1}{|x|V(t)} \kappa - \frac{q}{|x|^\alpha V(t)} \left[1 - i\beta \operatorname{sgn}(\kappa) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right] |\kappa|^\alpha \right\}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Отже, у режимі $|x|V(t) \rightarrow \infty$ після зворотньої заміни $\kappa = k|x|$ одержуємо

$$\begin{aligned} P(x, t) \sim & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \exp \left\{ i \frac{l_1}{V(t)} k \right. \\ & \left. - \frac{q}{V(t)} \left[1 - i\beta \operatorname{sgn}(k) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right] |k|^\alpha \right\}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Відмічаємо, що права частина в формулі (3.69) – це не що інше, як стандартне представлення α -стійкого розподілу Леві у вигляді оберненого пере-

творення Фур'є. Нагадаємо, що він задається характеристичною функцією [105, 202, 204]

$$\Psi_{\text{stable}}(k; \alpha, \beta, \mu, c) = \exp \{i\mu k - c[1 - i\beta \operatorname{sgn}(k)\omega(k, \alpha)]|k|^\alpha\}, \quad (3.70)$$

де

$$\omega(k, \alpha) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), & \alpha \neq 1, \\ -\frac{2}{\pi} \ln |k|, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (3.71)$$

Тут $\alpha \in (0, 2]$ – параметр стійкості, $\beta \in [-1, 1]$ – параметр асиметрії, μ – параметр локалізації (середнє значення в випадку $\alpha \in (1, 2]$), c – масштабуючий параметр. А значить у даному випадку в режимі $|x|V(t) \rightarrow \infty$ отримуємо густину ймовірності Леві

$$P(x, t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \Psi_{\text{stable}}\left[k; \alpha, \beta, \frac{l_1}{V(t)}, \frac{q}{V(t)}\right]. \quad (3.72)$$

Як і необхідно ця густина ймовірності має важкі хвости із хвостовим параметром α : $P(x, t) \sim A_\pm a^{-\alpha}(t)/|x|^{1+\alpha}$ при $|x| \rightarrow \infty$ з параметрами $A_\pm > 0$, що задаються хвостами $w(\xi)$. Цікаво відмітити, що при даних значеннях α і l_1 гранична густина $\mathcal{P}(y)$ буде односторонньою (формула (2.22)), а ось у режимі $|x|V(t) \rightarrow \infty$ із (3.72) слідує [202], що односторонність спостерігається тільки за умови $\alpha_+ \neq \alpha_-$, якщо ж $\alpha_+ = \alpha_-$, то маємо двосторонній розподіл. Проте це не суперечить попереднім результатам, оскільки гранична густина $\mathcal{P}(y)$ знайдена саме для певним чином масштабованої координати $Y(t)$. І при переході до $P(x, t)$ ми отримуємо коректне відображення розподілу у центральній частині $|x| \propto O[1/a(t)]$ на піввісі, де $\mathcal{P}(y) \neq 0$. Детально зупиняється на властивостях густини (3.72) ми не будемо, оскільки α -стійкий розподіл Леві – один із числа найфундаментальніших законів в теорії ймовірностей та теорії стохастичних процесів, а тому прекрасно досліджений в величезній кількості літератури.

Зауважимо, що точно таким же чином можна отримати формулу (3.72) (із

$\mu = 0$) і для випадків, коли граничні густини ймовірності $\mathcal{P}(y)$ мають важкі хвости, тобто при $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha \in (1, 2)$ із $l_1 = 0$ та $\alpha = 1$ із $\rho = 0$. Проте неважко впевнитися, що для важких гілок (3.72) головний член асимптотики буде такий же, як і для функції $a(t)\mathcal{P}[a(t)x]$. А значить перехід від $P(y)$ до $P(x, t)$ є справедливим як для центральної області, так і для рідкісних флюктуацій.

2) $\rho \neq 0, \alpha = 1$

Покажемо тепер, що випадок $\alpha = 1$ із $\rho \neq 0$ за умови $|x| \gg O[1/a(t)]$ також зводиться до розподілу (3.72). Згідно із підрозділом 2.2.4 у цьому випадку з урахуванням двох членів розкладу при $k \rightarrow 0$ асимптотика $1 - w_k$ дається виразом

$$1 - w_k \sim q \left[1 + i \frac{2}{\pi} \beta \operatorname{sgn}(k) \ln |k| \right] |k|. \quad (3.73)$$

Як і в попередній ситуації, підставляючи формулу (3.65) в (3.64), після заміни змінної $k|x| = \kappa$ маємо

$$\begin{aligned} P(x, t) &\sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{|x|} e^{-i\kappa \operatorname{sgn}(x)} \left\{ 1 + q \left[1 + i \frac{2}{\pi} \beta \operatorname{sgn}(\kappa) \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left(\frac{\ln |\kappa|}{|x|V(t)} - \frac{1}{|x|V(t)/\ln |x|} \right) \right] |\kappa| \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Будемо розглядати режим $|x|V(t)/\ln |x| \rightarrow \infty$. Можна показати, що це еквівалентно умові $|x|V(t)/\ln[1/V(t)] \rightarrow \infty$, а тому (оскільки функція $a(t) \sim |\rho|^{-1}V(t)/\ln[1/V(t)]$) ми знову аналізуємо поведінку $P(x, t)$ при $|x| \gg O[1/a(t)]$. У даному режимі маємо наступне асимптотичне співвідношення

$$\begin{aligned} &\left\{ 1 + q \left[1 + i(2/\pi)\beta \operatorname{sgn}(\kappa) \left(\frac{\ln |\kappa|}{|x|V(t)} - \frac{1}{|x|V(t)/\ln |x|} \right) \right] |\kappa| \right\}^{-1} \\ &\sim \exp \left\{ -q \left[1 + i \frac{2}{\pi} \beta \operatorname{sgn}(\kappa) \left(\frac{\ln |\kappa|}{|x|V(t)} - \frac{1}{|x|V(t)/\ln |x|} \right) \right] |\kappa| \right\}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Таким чином, після зворотньої заміни $\kappa = k|x|$ отримуємо

$$P(x, t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \exp \left\{ -\frac{q}{V(t)} \left[1 + i \frac{2}{\pi} \beta \operatorname{sgn}(k) \ln |k| \right] |k| \right\}. \quad (3.76)$$

Співставляючи вираз (3.76) із формулами (3.70) і (3.71) легко побачити, що і в другому випадку для області $|x| \gg O[1/a(t)]$ маємо α -стійкий розподіл Леві

$$P(x, t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \Psi_{\text{stable}} \left[k; 1, \beta, 0, \frac{q}{V(t)} \right]. \quad (3.77)$$

Як і потрібно цей результат дає асимптотичну поведінку хвостів $P(x, t) \sim A_{\pm} a^{-1}(t)/|x|^2$ при $|x| \rightarrow \infty$ з залежними від хвостів $w(\xi)$ додатніми параметрами A_{\pm} . І, знову ж таки, при $\alpha_+ = \alpha_-$, на відміну від граничної густини $\mathcal{P}(y)$, із виразу (3.77) слідує двосторонній розподіл $P(x, t)$.

3) $l_1 = 0, \alpha = 2$

Для цього випадку асимптотика $1 - w_k$ при $k \rightarrow 0$ має вигляд

$$1 - w_k \sim \tilde{u} k^2 \ln \frac{1}{|k|} \quad (3.78)$$

де $\tilde{u} = (u_+ + u_-)/2$. Підставимо цей вираз в формулу (3.64) і знову зробимо заміну $k|x| = \kappa$, тоді

$$P(x, t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{|\kappa|} e^{-i\kappa \operatorname{sgn}(x)} \left\{ 1 + \tilde{u} \left(\frac{1}{x^2 V(t) / \ln |x|} - \frac{\ln |\kappa|}{x^2 V(t)} \right) \kappa^2 \right\}^{-1}. \quad (3.79)$$

Розглянемо останній вираз у режимі $x^2 V(t) / \ln |x| \rightarrow \infty$, що еквівалентно наступній умові $x^2 V(t) / \ln [1/V(t)] \rightarrow \infty$. Браховуючи, що в цьому випадку функція $a(t) \sim \sqrt{2V(t)}/\sqrt{\tilde{u} \ln [1/V(t)]}$, то, як і необхідно, ми досліджуємо характер поведінки $P(x, t)$ при $|x| \gg O[1/a(t)]$. Однак тут виникає дуже важливий нюанс. Неважко переконатися, що при $\alpha = 2$ α -стійкий розподіл Леві зводиться до нормальногого розподілу (тільки з відмінним від класи-

чного масштабуванням). Це пов'язано з тим, що для $\alpha = 2$ формула (3.71) не включає в себе логарифмічний множник із формулі (3.78), тобто не враховує важкі хвости $w(\xi)$.

Отже, у цій ситуації поведінка $P(x, t)$ в заданому режимі не буде описуватися розподілом Леві. А тому нам не вдасться отримати необхідну асимптотику розподілу $P(x, t)$ діючи таким же чином, як і раніше. Виходячи із сказаного, ми будемо шукати асимптотику $P(x, t)$ при $|x| \gg O[1/a(t)]$ у вигляді корекції до попередньо отриманого експоненціального розподілу, що має місце у режимі $|x| \propto O[1/a(t)]$ (формула (2.57)). При цьому наголосимо, що це буде не нормована певним чином гранична густина, а апроксимація розв'язку відповідного рівняння Монтролла-Вейсса.

Можна показати, що при $k \rightarrow 0$ більш точний розклад $1 - w_k$ з урахуванням члену другого порядку дається виразом (цей результат слідує із роботи [317])

$$1 - w_k \sim -\tilde{u} \ln |k| k^2 - [\vartheta_1 - i \operatorname{sgn}(k) \vartheta_2] k^2 + o(k^2). \quad (3.80)$$

Тут $\vartheta_1 = [u_+ \ln(C_+ \sqrt{u_+}) + u_- \ln(C_- \sqrt{u_-})]/2$, $\vartheta_2 = \pi(u_+ - u_-)/4$, а константи C_{\pm} знаходяться із рівності

$$C_{\pm} = \exp \left\{ \gamma - \frac{3}{2} - \int_0^{\sqrt{u_{\pm}}} d\xi w(\pm\xi) \frac{\xi^2}{u_{\pm}} - \int_{\sqrt{u_{\pm}}}^{\infty} d\xi \left[w(\pm\xi) \frac{\xi^2}{u_{\pm}} - \frac{1}{\xi} \right] \right\} \quad (3.81)$$

($\gamma \approx 0.57721\dots$ – постійна Ейлера-Маскероні). Як ми бачимо, при врахуванні члену другого порядку роль грають не тільки хвости $w(\xi)$, а й поведінка $w(\xi)$ на всій віці ξ .

Таким чином, взявши до уваги вираз (3.80), замість формулі (3.79) ми будемо досліджувати поведінку виразу

$$P(x, t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{|x|} e^{-i\kappa \operatorname{sgn}(x)} \left\{ 1 + \frac{\tilde{u} \ln(\theta|x|) + i \operatorname{sgn}(\kappa) \vartheta_2}{V(t)x^2} \kappa^2 - \frac{\tilde{u} \ln |\kappa|}{V(t)x^2} \kappa^2 \right\}^{-1}, \quad (3.82)$$

де ми ввели $\theta = e^{-\vartheta_1/\tilde{u}}$. Врахуємо той факт, що при фіксованому κ має місце співвідношення

$$\begin{aligned}
 & \left\{ 1 + \frac{\tilde{u} \ln(\theta|x|) + i \operatorname{sgn}(\kappa) \vartheta_2}{V(t)x^2} \kappa^2 - \frac{\tilde{u} \ln |\kappa|}{V(t)x^2} \kappa^2 \right\}^{-1} \\
 &= \frac{\left[\left(1 - \frac{\tilde{u} \ln |\kappa|}{V(t)x^2} \kappa^2 \right) + \frac{\tilde{u} \ln |\kappa|}{V(t)x^2} \kappa^2 \right] \left[1 + O\left(\frac{\ln(\theta|x|)}{V^2(t)x^4}\right) \right]}{\left[1 + \frac{\tilde{u} \ln(\theta|x|)}{V(t)x^2} \kappa^2 \right] \left[1 + \frac{i \operatorname{sgn}(\kappa) \vartheta_2}{V(t)x^2} \kappa^2 \right] \left[1 - \frac{\tilde{u} \ln |\kappa|}{V(t)x^2} \kappa^2 \right]} \\
 &\sim \frac{1}{\left[1 + \frac{\tilde{u} \ln(\theta|x|)}{V(t)x^2} \kappa^2 \right] \left[1 + \frac{i \operatorname{sgn}(\kappa) \vartheta_2}{V(t)x^2} \kappa^2 \right]} + \frac{\tilde{u} \ln |\kappa|}{V(t)x^2} \kappa^2 \exp \left\{ -\frac{\tilde{u} \ln(\theta|x|)}{V(t)x^2} \kappa^2 \right\}. \tag{3.83}
 \end{aligned}$$

Тут ми використали формулу $1/(1+\varepsilon) \sim e^{-\varepsilon}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ і знехтували членами порядку $O\left(\frac{1}{V(t)x^2}\right)$.

Далі, підставляючи рівняння (3.83) в (3.82), після спрощень встановлюємо, що розподіл частинок в заданому режимі апроксимується формулою

$$\begin{aligned}
 P(x, t) &\simeq \frac{\beta_t}{\pi} \int_0^\infty d\xi \frac{\cos(\beta_t x \xi) - b \xi^2 \sin(\beta_t x \xi)}{(1 + \xi^2)(1 + b^2 \xi^4)} \\
 &+ \frac{\beta_t^3 \tilde{u}}{\pi V(t)} \int_0^\infty d\xi \cos(\beta_t x \xi) \ln(\beta_t |x| \xi) \xi^2 e^{-\xi^2}, \tag{3.84}
 \end{aligned}$$

де ми поклали

$$\beta_t = \sqrt{\frac{V(t)}{\tilde{u} \ln(\theta|x|)}}, \tag{3.85}$$

та

$$b = \frac{\vartheta_2}{\tilde{u} \ln(\theta|x|)}. \tag{3.86}$$

В додатку А показано, що при $|x| \rightarrow \infty$ хвости густини ймовірності $P(x, t)$

будуть важкими

$$P(x, t) \simeq \frac{\tilde{u}[2 + \operatorname{sgn}(x)\epsilon]}{V(t)} \frac{1}{|x|^3}, \quad (3.87)$$

де, нагадаємо, параметри $\tilde{u} = \frac{u_+ + u_-}{2}$ та $\epsilon = \frac{u_+ - u_-}{u_+ + u_-}$. Зauważмо, що для типових флюктуацій у центральній області $|x| \propto O[1/a(t)]$ із проведених у додатку А розрахунків слідує, що при $t \rightarrow \infty$ асимптотична у часі поведінка (3.84) прямує до необхідної граничної густини ймовірності $\mathcal{P}(y) = \frac{1}{2}e^{-|y|}$, яку ми отримали в підрозділі 2.2.5.

4) $l_1 \neq 0, \alpha = 2$

У разі, якщо $\alpha = 2$ і момент першого порядку $w(\xi)$ ненульовий, метод отримання необхідних хвостів $P(x, t)$ буде таким же, як і в попередньому випадку. Асимптотика $1 - w_k$ при $k \rightarrow 0$ дається формулою

$$1 - w_k \sim -il_1k - \tilde{u} \ln |k|k^2 - [\vartheta_1 - i\operatorname{sgn}(k)\vartheta_2]k^2 + o(k^2), \quad (3.88)$$

а тому

$$\begin{aligned} P(x, t) \sim & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{|x|} e^{-i\kappa \operatorname{sgn}(x)} \left\{ 1 - \frac{il_1}{V(t)|x|} \kappa \right. \\ & \left. + \frac{\tilde{u} \ln(\theta|x|) + i\operatorname{sgn}(\kappa)\vartheta_2}{V(t)x^2} \kappa^2 - \frac{\tilde{u} \ln |\kappa|}{V(t)x^2} \kappa^2 \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Далі, аналогічно до попереднього випадку, використовуючи співвідношення $1/(1 + \varepsilon) \sim e^{-\varepsilon}$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) і нехтуючи членами порядку $O\left(\frac{1}{V^2(t)x^2}\right)$, при фіксованому κ маємо

$$\begin{aligned}
& \left\{ 1 - \frac{il_1}{V(t)|x|} \kappa + \frac{\tilde{u} \ln(\theta|x|) + i \operatorname{sgn}(\kappa) \vartheta_2}{V(t)x^2} \kappa^2 - \frac{\tilde{u} \ln |\kappa|}{V(t)x^2} \kappa^2 \right\}^{-1} \\
& \sim \frac{\exp \left\{ \frac{il_1}{V(t)|x|} \kappa \right\}}{\left[1 + \frac{\tilde{u} \ln(\theta|x|)}{V(t)x^2} \kappa^2 \right] \left[1 + \frac{i \operatorname{sgn}(\kappa) \vartheta_2}{V(t)x^2} \kappa^2 \right]} \\
& + \frac{\tilde{u} \ln |\kappa|}{V(t)x^2} \kappa^2 \exp \left\{ \frac{il_1}{V(t)|x|} \kappa - \frac{\tilde{u} \ln(\theta|x|)}{V(t)x^2} \kappa^2 \right\}. \tag{3.90}
\end{aligned}$$

Із цього слідує, що у режимі $|x| \gg O[1/a(t)]$ поведінка $P(x, t)$ наближено описується виразом

$$\begin{aligned}
P(x, t) & \simeq \frac{\beta_t}{\pi} \int_0^\infty d\xi \frac{\cos[\beta_t(x - \bar{x})\xi] - b\xi^2 \sin[\beta_t(x - \bar{x})\xi]}{(1 + \xi^2)(1 + b^2\xi^4)} \\
& + \frac{\beta_t^3 \tilde{u}}{\pi V(t)} \int_0^\infty d\xi \cos[\beta_t(x - \bar{x})\xi] \ln(\beta_t|x|\xi) \xi^2 e^{-\xi^2}, \tag{3.91}
\end{aligned}$$

де $\bar{x} = l_1/V(t)$ – середнє значення (головна його частина) положення $X(t)$ блукаючої частинки. Як ми бачимо, ця формула співпадає з попереднім випадком (3.84), лише з тією різницею, що має місце зсув координати x на величину середнього значення. Таким чином, при $|x| \rightarrow \infty$ отримуємо важкі хвости

$$P(x, t) \simeq \frac{\tilde{u}(2 + \operatorname{sgn}[x - l_1/V(t)]\epsilon)}{V(t)} \frac{1}{|x - l_1/V(t)|^3}. \tag{3.92}$$

Отже, ми показали, що в усіх випадках, коли гранична густина ймовірності $P(y)$ є експоненціальною, тим не менш хвости $P(x, t)$ насправді є важкими і пропорційні функції $1/|x|^{1+\alpha}$. Нещодавно схожий до випадку 3 і 4 підхід було застосовано для описання дисперсії частинок та асимптотичної поведінки розподілу двовимірного газу Лоренца з нескінченним горизонтом [317]. А саме, на фізично релевантних масштабах часу отримано корекцію до нормальногорозподілу, що має потрібні важкі хвости із індексом $\alpha = 2$. До того ж відмітимо, що існування подібних двох масштабуючих режимів для розподілів частинок грає важливу роль при описанні типових та рідкістних флюктуацій для супердифузійних блукань Леві [229]. Зокрема, такі моделі застосовуються для описа-

ння процесів Сізіфового лазерного охолодження в оптичних решітках [228, 230]. Окрім цього, біскалярні розв'язки рівняння типу Монтролла-Вейсса мають місце при дослідженні різноманітних процесів типу відновлення [231].

3.4. Знаходження асимптотичних у часі розв'язків для надповільних польотів Леві з використанням центральної граничної теореми

У цьому підрозділі ми покажемо дещо інше виведення асимптотичного у часі виразу для густини ймовірності $P(x, t)$, а значить і спосіб знаходження граничної густини $\mathcal{P}(y)$, оскільки вони пов'язані виразом $\mathcal{P}(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} a^{-1}(t)P[y/a(t), t]$. Цей підхід продемонструє зв'язок отриманих результатів із узагальненою центральною граничною теоремою. Із попередніх розрахунків відомо, що при $t \rightarrow \infty$

$$P(x, t) \sim \frac{V(t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{-ikx}}{V(t) + h(k)}, \quad (3.93)$$

де ми поклали $h(k) \sim 1 - w_k$, тобто

$$h(k) = \begin{cases} q \left[1 - i \beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \operatorname{sgn}(k) \right] |k|^\alpha, & \alpha \in (0, 1), \\ q \left[1 + i \frac{2}{\pi} \beta \operatorname{sgn}(k) \ln |k| \right] |k|, & \alpha = 1, \\ -il_1 k + q \left[1 - i \beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \operatorname{sgn}(k) \right] |k|, & \alpha \in (1, 2), \\ -il_1 k - \tilde{u} \ln |k| k^2, & \alpha = 2. \end{cases} \quad (3.94)$$

Спочатку ми отримаємо густину ймовірності розподілу $P_{X_n}(x)$ положення частинки $X_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$ у припущення, що кількість стрибків $n \rightarrow \infty$ не є випадковим і залежним від часу значенням. У такому разі можна застосувати добре відомий у теорії ймовірностей метод характеристичних функцій [105, 199, 202, 204], який є одним із найбільш зручних методів доведення центральних граничних теорем.

Введемо випадкову величину

$$Z_n = \frac{X_n - A_n n}{B_n} = \sum_{j=1}^n \frac{\xi_j - A_n}{B_n} \quad (3.95)$$

з певними залежними від змінної n параметрами A_n і B_n , які ми вкажемо пізніше. Оскільки ξ_j – однаково розподілені незалежні випадкові величини, то

$$\begin{aligned} \Psi_{Z_n}(k) &= \Psi_{\sum_{j=1}^n (\xi_j - A_n)/B_n} = \prod_{j=1}^n \Psi_{(\xi_j - A_n)/B_n}(k) \\ &= \left[\Psi_{\frac{1}{B_n} \xi_1 - \frac{A_n}{B_n}}(k) \right]^n = \left[e^{-i k \frac{A_n}{B_n}} \Psi_{\xi_1} \left(\frac{k}{B_n} \right) \right]^n \end{aligned} \quad (3.96)$$

Тут $\Psi_Q(k)$ – характеристична функція деякої випадкової величини Q . А так як $\Psi_{\xi_1} \left(\frac{k}{B_n} \right) = w_{\frac{k}{B_n}}$, то при $B_n \rightarrow \infty$ із формули (3.96) маємо

$$\Psi_{Z_n}(k) = e^{-i k \frac{A_n}{B_n} n} \left[1 - h \left(\frac{k}{B_n} \right) + o \left(\frac{k}{B_n} \right) \right]^n. \quad (3.97)$$

Співставляючи вирази (3.97) і (3.94), можна помітити, що при наступному виборі параметрів

$$A_n = \begin{cases} 0, & \alpha \in (0, 1), \\ \frac{2}{\pi} q \beta \ln n, & \alpha = 1, \\ l_1, & \alpha \in (1, 2] \end{cases} \quad (3.98)$$

та

$$B_n = \begin{cases} n^{1/\alpha}, & \alpha \in (0, 2), \\ \left(\frac{1}{2} n \ln n \right)^{1/2}, & \alpha = 2 \end{cases} \quad (3.99)$$

на основі границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\varepsilon}{n} \right)^n \rightarrow e^{-\varepsilon}$ ми отримаємо

$$\Psi_{Z_n}(k) \rightarrow \begin{cases} \exp \left\{ -q [1 - i \beta \operatorname{sgn}(k) \omega(k, \alpha)] |k|^\alpha \right\}, & \alpha \in (0, 2), \\ \exp \left\{ -\tilde{u} k^2 \right\}, & \alpha = 2. \end{cases} \quad (3.100)$$

Бачимо, що права частина в останній формулі – це характеристична функція α -стійкого розподілу Леві (див. вирази (3.70) і (3.71)), тобто $\Psi_{Z_n}(k) \rightarrow \Psi_{\text{stable}}(k; \alpha, \beta, 0, c)$ при $n \rightarrow \infty$ із параметром $c = q$ для $\alpha \in (0, 2)$ та $c = \tilde{u}$ для $\alpha = 2$.

За теоремою неперервності Леві [105, 199, 202] із збіжності характеристичних функцій $\Psi_{Q_n}(k) \rightarrow \Psi_Q(k)$ слідує збіжність по розподілу випадкових величин $Q_n \xrightarrow{d} Q$ при $n \rightarrow \infty$. Таким чином, враховуючи, що для густини ймовірності $P_{X_n}(x)$ при $z = \frac{x - A_n n}{B_n}$ виконується рівність $P_{X_n}(x) = P_{Z_n}(z) z'_x = \frac{1}{B_n} P_{Z_n}\left(\frac{x - A_n n}{B_n}\right)$, отримуємо

$$P_{X_n}(x) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{B_n} e^{-ik\frac{x - A_n n}{B_n}} \Psi_{\text{stable}}(k; \alpha, \beta, 0, c) \quad (3.101)$$

($n \rightarrow \infty$). Після підстановки $\kappa = k/B_n$ у випадку $\alpha \in (0, 2)$ знаходимо

$$\begin{aligned} P_{X_n}(x) &\rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa e^{-i\kappa x} \Psi_{\text{stable}}(\kappa; \alpha, \beta, n\mu, nq) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa e^{-i\kappa x} \exp \{in\mu\kappa - nq [1 - i\beta \text{sgn}(k)\omega(k, \alpha)] |\kappa|^\alpha\}, \end{aligned} \quad (3.102)$$

де $\mu = 0$ при $\alpha \in (0, 1]$ та $\mu = l_1$ при $\alpha \in (1, 2)$. А для випадку $\alpha = 2$ маємо

$$\begin{aligned} P_{X_n}(x) &\rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa e^{-i\kappa x} \Psi_{\text{stable}}(\kappa; 2, \beta, nl_1, \tilde{u}n \ln n/2) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa e^{-i\kappa x} \exp \{inl_1\kappa - (\tilde{u}/2)n \ln n \kappa^2\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{u}n \ln n}} \exp \left\{ -\frac{(x - nl_1)^2}{2\tilde{u}n \ln n} \right\}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Із формул (3.102) і (3.103) ми бачимо, що випадкова величина X_n має α -стійкий розподіл Леві (що зводиться до нормального при $\alpha = 2$).

Далі ми приймаємо до уваги, що нас цікавить розподіл $P(x, t)$ положення частинки $X(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} \xi_j$ при $t \rightarrow \infty$ за умови, що кількість стрибків

$N(t)$ за час t є випадковою величиною. Таким чином, для знаходження розподілу $X(t)$ нам необхідно усереднити розподіл X_n (формули (3.102) і (3.103)) відносно випадкового числа стрибків. Тобто маємо $P(x, t) = \langle P_{X_n}(x) \rangle_{N(t)}$, де $\langle \cdot \rangle_{N(t)}$ – усереднення відповідної густини по реалізаціям процесу $N(t)$. Отже, для встановлення виразу для $P(x, t)$ потрібно знати розподіл $N(t)$.

Неважко зрозуміти, що густина ймовірності $\Lambda(n, t)$ того, що за час t відбудеться n стрибків може бути описана рівнянням Монтролла-Вейсса. Аналогічно до формули (2.1), це рівняння має вигляд

$$\Lambda_{ks} = \frac{1 - p_s}{s(1 - p_s \chi_k)}. \quad (3.104)$$

Тут перетворення Фур'є застосовується до змінної n і введено характеристичну функцію $\chi_k = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{ik\eta} \chi(\eta)$. В формулі (3.104) густина ймовірності $\chi(\eta)$ є аналогом $w(\xi)$ та являється розподілом величини, на яку збільшується значення $N(t)$ на кожному кроці процесу. Очевидно, що збільшення кількості стрибків завжди йде з кроком 1, а тому $\chi(\eta) = \delta(\eta - 1)$.

Тепер нас буде цікавити розв'язок рівняння Монтролла-Вейсса (3.104) при $t \rightarrow \infty$. Діючи таким же чином, як і в розділі 1.3, можна встановити, що

$$\Lambda(n, t) \sim \frac{V(t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \frac{1}{V(t) - ik} = V(t) e^{-nV(t)} \quad (3.105)$$

при $t \rightarrow \infty$. Далі, використовуючи формули (3.105) і (3.102), для $\alpha \in (0, 2)$ ми знаходимо

$$\begin{aligned} P(x, t) &\sim V(t) \int_0^{\infty} dn e^{-nV(t)} P_{X_n}(x) \\ &= \frac{V(t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{e^{-i\kappa x}}{V(t) - i\mu\kappa + q [1 - i\beta \operatorname{sgn}(k) \omega(k, \alpha)] |\kappa|^{\alpha}} \end{aligned} \quad (3.106)$$

при $t \rightarrow \infty$. Тепер, дивлячись на останню формулу і вираз (3.94), ми бачимо, що формула (3.106) співпадає з (3.93), тобто ми дійсно отримали той же асим-

птоличний у часі вираз для $P(x, t)$, що і в підрозділі 2.2, застосовуючи при цьому інший підхід.

Перейдемо до випадку $\alpha = 2$. Із другого рядку рівняння (3.103) після заміни змінної $V(t)n = \tilde{n}$ та врахування, що $V(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, одержуємо

$$\begin{aligned} P(x, t) &\sim \int_0^\infty d\tilde{n} e^{-\tilde{n}} P_{X_{\tilde{n}/V(t)}}(x) \\ &\sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\kappa \frac{e^{-i\kappa x}}{1 - i\frac{l_1}{V(t)}\kappa + \frac{\tilde{u}\ln[1/V(t)]}{2V(t)}\kappa^2}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Із останньої формули випливає, що у центральній частині $|x| \propto O[1/a(t)]$ при $l_1 \neq 0$ ми отримуємо густину ймовірності $P(x, t) \sim H(l_1 x) a(t) e^{-a(t)|x|}$ із $a(t) \sim \frac{V(t)}{|l_1|}$; а при $l_1 = 0$ густину $P(x, t) \sim \frac{1}{2} a(t) e^{-a(t)|x|}$ із $a(t) \sim 2\sqrt{\frac{V(t)}{(u_+ + u_-)\ln[1/V(t)]}}$. Як ми бачимо, ці результати також співпадають із отриманими в підрозділі 2.2.

У такий спосіб ми показали альтернативний спосіб отримання розв'язків для досліджуваного типу випадкових процесів. Цей підхід цікавий тим, що дозволяє побачити зв'язок асимптотичних у часі розв'язків рівняння Монтролла-Вейssa для неперервних у часі випадкових блукань та фундаментальних у теорії ймовірностей узагальнених центральних граничних теорем. Виявляється, що асимптотичний у часі вираз для густини розподілу положення частинки $X(t)$ є не чим іншим, як усередненням α -стійкого розподілу Леві відносно випадкового числа стрибків частинки за час блукання t .

3.5. Рівняння Ланжевена для CTRW-процесу

Покажимо, що асимптотичну поведінку густини ймовірності $P(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$ (а тому і обчислення $\mathcal{P}(y)$) можна отримати, виходячи із підходу субординатійних рівнянь Ланжевена. Слідуючи підрозділу 1.3.3, досліджуваний процес в неперервній реалізації описується системою стохастичних рівнянь

$$\frac{d}{dv}X(v) = \xi(v), \quad \frac{d}{dv}t(v) = \tau(v), \quad (3.108)$$

де v – операційній час, що відіграє роль кількості “кроків” процесу $X(t)$. Для випадкових процесів $\eta_\xi(v)$ і $\eta_\tau(v)$, що генерують важкий шум $\xi(v)$ та надважкий шум $\tau(v)$ відповідно, інкременти є стаціонарними та незалежними, а їх похідні по часу $\frac{d}{dv}\eta_\xi(v) = \xi(v)$ і $\frac{d}{dv}\eta_\tau(v) = \tau(v)$.

Згідно із визначенням, густина ймовірності для випадкового процесу $X(v)$ записується як

$$R(x, v) = \langle \delta[x - X(v)] \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left\langle e^{-ik[x - X(v)]} \right\rangle, \quad (3.109)$$

а відповідна характеристична функція $R_k(v) = \mathcal{F}\{R(x, v)\} = \langle e^{-ikX(v)} \rangle$. В такому разі відомо (див., наприклад, [241, 244]), що для першого рівняння із системи (3.108) характеристична функція густини ймовірності за наявності одного аддитивного задовільняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial}{\partial v} R_k(v) = R_k(v) \ln \Psi_k \quad (3.110)$$

із початковою умовою $R_k(0) = 1$ і $\Psi_k = \langle e^{ik\eta_\xi(1)} \rangle$ – характеристичною функцією для процесу $\eta_\xi(1)$. Наприклад, для гауссового білого шуму $\Psi_k = e^{-Dk^2}$ (D – параметр інтенсивності) і рівняння (3.110) проводить до звичайного дифузійного $\frac{\partial}{\partial v} R(x, v) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} R(x, v)$.

Із узагальненої центральної граничної теореми слідує, що після усереднення важку густину $w(\xi)$ можна замінити відповідним α -стійким розподілом Леві, а тому $\Psi_k = \Psi_{\text{stable}}(k; \alpha, \beta, \mu, c)$ (див. формулі (3.70) та (3.71)) і отримуємо

$$R_k(v) = [\Psi_{\text{stable}}(k; \alpha, \beta, \mu, c)]^v = \Psi_{\text{stable}}(k; \alpha, \beta, \mu v, cv), \quad (3.111)$$

а далі $R(x, v) = \mathcal{F}^{-1}\{R_k(v)\}$. При цьому в формулі (3.111) параметри характеристичної функції $\Psi_{\text{stable}}(k; \alpha, \beta, \mu, c)$ задаються асимптотичною поведінкою хвостів $w(\xi) \sim u_\pm / |\xi|^{\alpha_\pm}$. А саме, маємо $\alpha = \min\{\alpha_\pm\}$; $\beta = \frac{u_+\delta_{\alpha\alpha_+} - u_-\delta_{\alpha\alpha_-}}{u_+\delta_{\alpha\alpha_+} + u_-\delta_{\alpha\alpha_-}}$;

$\mu = 0$, якщо $\alpha \in (0, 1]$, і $\mu = l_1$, якщо $\alpha \in (1, 2]$; $c = q = \frac{\pi(u_{+\delta\alpha\alpha_+} + u_{-\delta\alpha\alpha_-})}{2\Gamma(1+\alpha)\sin(\pi\alpha/2)}$, якщо $\alpha \neq 2$, і $c = \tilde{u} = \frac{u_+ + u_-}{2}$, якщо $\alpha = 2$. Звідки беруться ці значення параметрів можна зрозуміти, якщо поглянути на отримання розподілу Леві в попередньому підрозділі 3.4.

Розподіл $P(x, t)$, що в момент (фізичного) часу t процес $X(t) = X[t(v)] = x$ задається виразом (див. підрозділ 1.3.3)

$$P(x, t) = \int_0^\infty dv R(x, v) G(v, t), \quad (3.112)$$

де $G(v, t)$ – розподіл процесу $v(t)$. Звернемо увагу, що друге рівняння Ланжевена в системі (3.108) дозволяє отримати асоційоване йому рівняння Фоккера-Планка для густини ймовірності $F(t, v)$ процесу $t(v)$. А густину ймовірності оберненого процесу $v(t)$ знайдемо із формули

$$G(v, t) = -\frac{\partial}{\partial v} \hat{F}(t, v) \quad (3.113)$$

із функцією розподілу $\hat{F}(t, v) = \int_0^t dt' F(t', v)$ для процесу $t(v)$, де $F(t, v)$ – відповідна їй густина ймовірності.

Таким чином, $F(t, v) = \langle \delta[t - t(v)] \rangle$ і для процесу $t(v)$ аналогічно до формулі (3.110) в просторі Лапласа маємо рівняння Фоккера-Планка

$$\frac{\partial}{\partial v} F_s(v) = F_s(v) \ln \Phi_s. \quad (3.114)$$

із початковою умовою $F_s(0) = 1$, а також функціями $F_s(v) = \mathcal{L}\{F(t, v)\} = \langle e^{-st(v)} \rangle$ і $\Phi_s = \langle e^{-s\eta_\tau(1)} \rangle$. Звернемо увагу, що на відміну від рівняння (3.110), в рівнянні (3.114) зручно використовувати простір Лапласа, оскільки шум $\tau(v)$ є невід'ємним. Із підрозділу 2.2 слідує, що для надважкої густини $p(\tau)$ при $s \rightarrow 0$ справедливим є вираз $p_s \sim 1 - V(1/s) \sim e^{-V(1/s)}$, а тому маємо апроксимацію $\Phi_s \simeq e^{-V(1/s)}$. Отже, із (3.114) знаходимо $F_s(v) = e^{-vV(1/s)}$, а значить $\hat{F}_s(v) =$

$F_s(v)/s = e^{-vV(1/s)}/s$ і з формули (3.113)

$$G_s(v) = \frac{V(1/s)}{s} e^{-vV(1/s)}, \quad (3.115)$$

де $G_s(v) = \langle e^{-sv(t)} \rangle$.

Функція $e^{-vV(t)}$ належить до класу функцій, що повільно змінюються на нескінченності, тобто $e^{-vV(\lambda t)} \sim e^{-vV(t)}$ при $t \rightarrow \infty$ і будь-якому $\lambda > 0$. Покажемо, що цей факт випливає із властивостей $V(t)$. Згідно з означенням (див. підрозділ 2.1) $V(t) = \int_t^\infty dt' \varrho(t')/dt'$, а тому

$$\frac{e^{-vV(t)}}{e^{-vV(\lambda t)}} = \exp \left\{ -v \int_t^{\lambda t} dt' \varrho(t')/dt' \right\} = \exp \{-v\varrho(t^*) \ln \lambda\}, \quad (3.116)$$

де точка $t^* \in [t, \lambda t]$ (не втрачаючи узагальнення, можна вважати $\lambda > 1$). При отриманні формули (3.116) ми використали відому теорему про середнє значення [318]. Враховуючи, що $\varrho(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, маємо $\exp \{-v\varrho(t^*) \ln \lambda\} \rightarrow 1$, а значить $e^{-vV(t)}$ дійсно належить до зазначеного класу. Отже, застосовуючи до формули (3.115) тауберову теорему Карамати (при $s \rightarrow 0$), отримуємо

$$G(v, t) \sim V(t) e^{-vV(t)} \quad (3.117)$$

при великих значеннях t . Відмічаємо, що ми отримали такий же експоненціальний розподіл, що і в формулі (3.105), для отримання якої ми використовували теорію Монтролла-Вейсса.

Нарешті, підставляючи формули (3.111) та (3.117) в вираз (3.112), впевнюємося, що при великих значеннях часу густина $P(x, t)$ задається рівняннями (3.106) (при $\alpha \in (0, 2)$) та (3.107) (при $\alpha = 2$). Таким чином, метод Ланжевена приводить до таких же результатів як і прямий метод CTRW (підрозділ 2.2) та використання узагальнених центральних граничних теорем (підрозділ 3.4).

Наголосимо ще раз, що основна перевага методу Ланжевена буде проявлятися, якщо ввести зовнішні поля та флюктуючі властивості середовища. Водно-

час при цьому часто виникає складна проблема інтерпретації субординаційних рівнянь Ланжевена, як стохастичного числення шумів, так і самого подання процесу. Розглянемо, наприклад, рівняння

$$\frac{d}{dt}x(t) = F[x(t), t] + g[x(t), t]\xi(t), \quad (3.118)$$

де $F[x(t), t]$ – вплив зовнішніх полів, а $g[x(t), t]$ – мультиплікативний член, що характеризує залежність шуму від просторового положення частинки. Тоді, після введення операційного часу v , постає проблема як записати функцію $F[x(t), t]$. Зокрема, в частковому випадку, якщо $F[x(t), t] = F(t)$, зовнішнє поле можна подати як $F(v)$ чи $F[t(v)]$, що в загальному випадку призведе до отримання різних рівнянь Фоккера-Планка для $P(x, t)$. Це складне завдання вирішene лише в часткових випадках [282, 286–290] і потребує серйозного аналізу фізичної суті процесу.

3.6. Дробове рівняння для граничних густин ймовірності

При вивченні аномальних стохастичних процесів значну увагу приділяють їх зв'язку з дробними рівняннями, які асимптотично слідують із узагальнених основних кінетичних рівнянь. При цьому зачасту дробові рівняння виникають у зв'язку з розв'язанням проблеми Коші для просторово-часової аномальної диффузії [27, 29–32, 250] і отримуються після заміни стандартної частинної похідної другого порядку по просторовій координаті на дробову похідну Рісса-Феллера та частинної похідної першого порядку по часу на дробову похідну Капuto або Римана-Ліувілля [205, 319]. Провідна роль дробових рівнянь у дослідженні аномальних процесів переносу підштовхує нас спробувати знайти певний тип дробових співвідношень для розглядуваного класу випадкових блукань.

Оскільки ми маємо справу головним чином з масштабованою координатою положення частинки, то і необхідне дробне рівняння ми будемо шукати для густини ймовірності $\mathcal{P}(y)$. Відомо, що дробова по просторовій координаті похідна Рісса-Феллера yD_θ^γ порядку γ та з коефіцієнтом асиметрії θ дається

наступним чином (див., наприклад, статтю [312])

$$\mathcal{F}\{{}_yD_\theta^\gamma f(y)\} = -e^{i\operatorname{sgn}(k)\pi\theta/2}|k|^\gamma f_k, \quad (3.119)$$

де $\gamma \in (0, 2]$, $|\theta| \leq \min\{\gamma, 2 - \gamma\}$, і $\mathcal{F}\{f(y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{iky} f(y) = f_k$. Далі, використовуючи це означення та рівняння (2.32), отримуємо

$$\mathcal{F}\{{}_yD_{-2\varphi/\pi}^\alpha \mathcal{P}(y)\} = -e^{-i\operatorname{sgn}(k)\varphi}|k|^\alpha \mathcal{P}_\kappa = -\Phi(k)\mathcal{P}_k. \quad (3.120)$$

I, нарешті, приймаючи до уваги, що $\mathcal{F}\{\delta(y)\} = 1$ та

$$\mathcal{F}\{\mathcal{P}(y)\} = \frac{1}{1 + \Phi(k)} \quad (3.121)$$

(це слідує із співвідношення (2.18)), дробове рівняння для граничної густини ймовірності $\mathcal{P}(y)$ може бути записане у наступній компактній формі

$${}_yD_{-2\varphi/\pi}^\alpha \mathcal{P}(y) = \mathcal{P}(y) - \delta(y). \quad (3.122)$$

Звичайно, із рівняння Монтролла-Вейсса можна отримати і асимптотичне рівняння для густини ймовірності $P(x, t)$, що містить дробову по часу похідну. Однак, якщо степеневі розподіли часів очікування приводять до універсальної форми інтегрального оператора, що задає дробову похідну, то для надважких розподілів кожен окремий випадок може характеризуватися різним виглядом інтегрального оператору, який залежатиме від виду ймовірності $V(t)$. Це пов'язано з тим, що надважкі густини ймовірності не мають області притягання і для них не існує стійких розподілів.

3.7. Числове моделювання досліджуваних блукань

3.7.1. Алгоритм числового моделювання

Знаходження граничної густини ймовірності $\mathcal{P}(y)$ за допомогою числового моделювання є не зовсім стандартною задачею. Це слідує із того, що $\mathcal{P}(y)$

являється густиною ймовірності випадкової величини $Y(t) = a(t)X(t)$ в границі $t \rightarrow \infty$. У той час як при числовому моделюванні нам потрібно визначити поведінку величини $Y(T) = a(T)X(T)$ та її густину ймовірності

$$\mathcal{P}_T(y) = \frac{1}{a(T)} P\left(\frac{y}{a(T)}, T\right) \quad (3.123)$$

для деякого кінцевого значення $t = T$. Щоб бути впевненими, що ця густина ймовірності відповідає $\mathcal{P}(y)$, час моделювання (блукання) T повинен бути досить великим і перевищувати середній час очікування.

У нашому випадку всі дробові моменти густини ймовірності $p(\tau)$ не існують, а тому нема їх скінченного характерного середнього часу для $p(\tau)$. Це означає, що для кожного скінченного значення T завжди існує не мізерно мала ймовірність перевищення величини $V(T) = \int_T^\infty d\tau p(\tau)$. Мінімальне значення часу T повинно задаватися умовою $a(T) \ll 1$ або, що еквівалентно, $V(T) \ll 1$. Так як $V(T)$ – функція, що повільно змінюється на нескінченності, то вона дуже повільно спадає при збільшенні T , а значить цей час блукання повинен бути дуже великим. Але з іншої сторони великі значення T приводять до великого (в середньому) числа стрибків частинки $\bar{N}(T)$ за проміжок $(0, T)$. Цей факт випливає із того, що при великих значеннях часу середнє число стрибків $\langle N(t) \rangle \sim 1/V(T)$, а значить і час чисельного розрахунку буде дуже великим. Таким чином, для вибору прийнятного часу блукань T потрібно одночасно враховувати умову $V(T) \ll 1$ і адекватний час розрахунку.

Опишемо тепер саму процедуру моделювання CTRW-процесу. Нагадаємо, що частинка починає блукання в момент $t = 0$ і має позицію $X(0) = 0$. Через час τ_1 частинка робить стрибок довжиною ξ_1 , а тому її нове положення буде $X(\tau_1) = \xi_1$, далі через час τ_2 частинка здійснить стрибок довжиною ξ_2 і її положення буде $X(\tau_1 + \tau_2) = \xi_1 + \xi_2$ і т.д. Нехай за час блукання T частинка здійснить N стрибків, тобто $\sum_{n=1}^N \tau_n \leq T$ і $\sum_{n=1}^{N+1} \tau_n > T$, значить в фінальний момент часу T її положення рівне $X(T) = \sum_{n=1}^{N(T)} \xi_n$. А потім очевидно, що масштабоване положення частинки задається величиной $Y(T) = a(T)X(T)$

при відповідних функціях $a(T)$. Повторюючи цю процедуру багато разів, ми можемо знайти розподіл масштабованого положення частинки при великих значеннях часу.

Множини часів очікування $\{\tau_n\}$ та величин стрибків $\{\xi_n\}$ мають, відповідно, густини $p(\tau)$ і $w(\xi)$, а тому важливо описати метод їх генерування. Існує багато таких підходів, які відрізняються простотою та зручністю в той чи іншій ситуації [320]. Однак часто найбільш оптимальною процедурою виявляється метод інверсії, що особливо зручний для генерування випадкових величин з додатньою густиною (тобто такою, що не має інтервалів, де вона рівна нулю). Це пояснюється тим, що в такому випадку кумулятивна функція буде строго зростати, а значить матиме обернену функцію на всій області визначення. В основі даного методу лежить теорема [320], яка говорить, що нехай $F(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} d\xi' f(\xi')$ – неперервна кумулятивна функція розподілу і $F^{-1}(U) = \inf\{\xi : F(\xi) = U, 0 < U < 1\}$ – обернена до неї функція, тоді, якщо U – рівномірно розподілена на $(0, 1)$ випадкова величина, то випадкова величина $\xi = F^{-1}(U)$ буде мати кумулятивну функцію розподілу F . Таким чином, коли густини $p(\tau)$ і $w(\xi)$ є додатніми, то їх кумулятивні функції розподілу $F_p(\tau) = \int_0^{\tau} d\xi' f(\xi')$ і $F_w(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} d\xi' w(\xi')$ будуть мати обернені до них функції, а значить ми можемо генерувати необхідні нам випадкові величини методом інверсії.

Відтак, згідно з описаною вище процедурою, представимо наступний алгоритм числового моделювання масштабованого положення блукаючої частинки.

Задаємо початкове положення: $X \leftarrow 0$

Задаємо початковий час: $t \leftarrow 0$

Задаємо загальний час блукань: T

REPEAT

Генеруємо рівномірну на $(0,1)$ випадкову величину U

Знаходимо час очікування: $\tau \leftarrow F_p^{-1}(U)$

Знаходимо поточний час блукань: $t \leftarrow t + \tau$

IF $t \leq T$

THEN

Генеруємо рівномірну на $(0,1)$ випадкову величину U

Знаходимо величину стрибка: $\xi \leftarrow F_w^{-1}(U)$

Знаходимо поточну позицію: $X \leftarrow X + \xi$

ELSE

Знаходимо відповідну масштабовану функцію $a(T)$

Повертаємо масштабоване положення $Y = a(T)X$

UNTIL $t \leq T$

Зазначимо, що запропонований алгоритм легко модифікувати для моделювання CTRW-процесу у зв'язаному випадку, коли множини $\{\xi_n\}$ і $\{\tau_n\}$ залежать одна від одної, або для числового вивчення багатовимірного блукання.

3.7.2. Приклади числового моделювання поведінки граничних густин ймовірності

У якості ілюстративного прикладу моделювання ми використаємо наступну густину ймовірності часу очікування

$$p(\tau) = \frac{v \ln^v g}{(g + \tau) \ln^{1+v}(g + \tau)} \quad (3.124)$$

із параметрами $v > 0$ і $g > 1$. Вибор цієї густини обумовлюється тим, що її кумулятивна функція розподілу $F_p(\tau) = \int_0^\tau d\tau' p(\tau')$ легко знаходиться

$$F_p(\tau) = 1 - \frac{\ln^v g}{\ln^v(g + \tau)}, \quad (3.125)$$

а тому обернена до $U = F_p(\tau)$ функція дається виразом $\tau = g^{(1-U)^{-1/v}} - g$. Таким чином, на основі методу інверсії випадкові величини із густиною (3.124)

можна генерувати за допомогою рівняння

$$\tau_n = g^{(1-U_n)^{-1/v}} - g, \quad (3.126)$$

де $n = \overline{1, \infty}$ і U_n – рівномірно розподілені на $(0, 1)$ числа. Як ми бачимо, у цьому випадку генерація необхідних часів очікування здійснюється дуже просто. Для нашого моделювання у якості параметрів в співвідношенні (3.124) (а тому і в (3.126)) ми вибрали $g = 2, v = 2$ і задали час $T = 10^{15}$, із чого слідує $V(T) \approx 4 \cdot 10^{-4}$.

При виборі густини ймовірності $w(\xi)$ для проведення моделювання нам треба враховувати дві умови. По-перше, для перевірки теоретичних результатів нам необхідно розглянути всі представлені раніше характерні випадки. А, по-друге, густина $w(\xi)$ повинна, знову ж, бути такою, щоб для її кумулятивної функції розподілу $F_w(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} d\xi' w(\xi')$ легко знаходилась обернена. Ці умови просто задоволінити, наприклад, задавши наступну густину ймовірності величини стрибка

$$w(\xi) = \begin{cases} \alpha_- c_- b_-^{\alpha_-} / (b_- - \xi)^{1+\alpha_-}, & \xi < 0, \\ \alpha_+ c_+ b_+^{\alpha_+} / (b_+ + \xi)^{1+\alpha_+}, & \xi \geq 0. \end{cases} \quad (3.127)$$

Тут $b_{\pm} \in (0, \infty)$ і $c_+ + c_- = 1$, де c_+ та c_- – ймовірності того, що $\xi \geq 0$ і $\xi < 0$ відповідно. Із рівняння (3.127) знаходимо

$$F_w(\xi) = \begin{cases} c_- b_-^{\alpha_-} / (b_- - \xi)^{\alpha_-}, & \xi < 0, \\ 1 - c_+ b_+^{\alpha_+} / (b_+ + \xi)^{\alpha_+}, & \xi \geq 0, \end{cases} \quad (3.128)$$

а значить величини стрибків даються виразами

$$\xi_n = \begin{cases} -b_- (c_- / U_n)^{1/\alpha_-} + b_-, & U_n < c_-, \\ b_+ [c_+ / (1 - U_n)]^{1/\alpha_+} - b_+, & U_n \geq c_-. \end{cases} \quad (3.129)$$

Відмітимо, що застосовуючи запропонований вище алгоритм моделювання CTWR для \mathcal{N} частинок, ми в кожному випадку знаходимо відповідне положення $Y(T)$, а необхідну граничну густину ймовірності приблизно можна знайти наступним чином: $\mathcal{P}_T(y) = \mathcal{N}_{\Delta y}/\mathcal{N}$, де $\mathcal{N}_{\Delta y}$ – це число частинок із положенням $Y(T) \in [y, y + \Delta y]$. У всіх випадках проведеного чисельного моделювання ми покладали $\mathcal{N} = 10^5$ і $\Delta y = 10^{-1}$; інші необхідні параметри наведено нижче.

1) $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha_+ \neq \alpha_-$

У цьому випадку гранична густина ймовірності $\mathcal{P}(y)$ залежить тільки від мінімального значення хвостового індексу α (див. рівняння (3.11)). Проте для числового знаходження граничної густини $\mathcal{P}_T(y)$ за допомогою запропонованої процедури всі параметри в рівняннях (3.124) і (3.127) повинні бути задані. Окрім вже зазначених параметрів моделювання ми задаємо $\alpha = \alpha_+ = 1/2$, $c_+ = 2/3$, $b_+ = 1$ та $\alpha_- = 3/4$, $c_- = 1/3$, $b_- = 1$. При цих параметрах вираз (2.31) приводить до $a(T) \approx 1.2 \cdot 10^{-7}$, а чисельно отримані значення $\mathcal{P}_T(y)$ показані на рисунку 3.1 трикутниками.

2) $\alpha \in (1, 2)$, $\alpha_+ \neq \alpha_-, l_1 = 0$

Виходячи із того, що в данній ситуації момент першого порядку густини ймовірності (3.127) дається формулою

$$l_1 = \frac{c_+ b_+}{\alpha_+ - 1} - \frac{c_- b_-}{\alpha_- - 1} \quad (3.130)$$

($\alpha_{\pm} > 1$). Умова $l_1 = 0$ тягне за собою той факт, що параметри $w(\xi)$ повинні задовольняти рівність $c_+ b_+ / (\alpha_+ - 1) = c_- b_- / (\alpha_- - 1)$. Тоді, якщо задати $\alpha = \alpha_+ = 5/4$, $c_+ = 5/22$, $b_+ = 1$ та $\alpha_- = 37/20$, $c_- = 17/22$, $b_- = 1$, то $c_+ b_+ / (\alpha_+ - 1) = c_- b_- / (\alpha_- - 1) = 10/11$ і $a(T) \approx 1.8 \cdot 10^{-3}$. Результати моделювання $\mathcal{P}_T(y)$ зображені на рисунку 3.2.

3) $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (0, 1)$, $u_+ \neq u_-$

Згідно із рівнянням (3.127) та асимптотичною формулою (2.11), параметри

u_{\pm} виражаються наступним чином: $u_{\pm} = \alpha_{\pm} c_{\pm} b_{\pm}^{\alpha_{\pm}}$. Враховуючи, що $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha$ і $u_+ \neq u_-$, тобто $c_+ b_+^{\alpha_+} \neq c_- b_-^{\alpha_-}$, ми вибираємо $\alpha = 1/2$, $c_+ = 2/3$, $b_+ = 1$ і $c_- = 1/3$, $b_- = 1$. Для цих параметрів величини $u_+ = 1/3$, $u_- = 1/6$ (а значить $\epsilon = 1/3$) і $a(T) \approx 9.3 \cdot 10^{-8}$. Результати чисельного моделювання можна побачити на рисунку 3.3.

4) $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (1, 2)$, $u_+ \neq u_-$, $l_1 = 0$

І, нарешті, у цей раз умови $u_+ \neq u_-$ і $l_1 = 0$ приводять відповідно до виразів $c_+ b_+^{\alpha} \neq c_- b_-^{\alpha}$ і $c_+ b_+ = c_- b_-$. Задаючи $\alpha = 5/4$, $c_+ = 1/5$, $b_+ = 5$ і $c_- = 4/5$, $b_- = 5/4$, отримуємо $u_+ = 5^{5/4}/4 \approx 1.87$, $u_- = (5/4)^{5/4} \approx 1.32$ (тобто $\epsilon = (\sqrt{2} - 1)/(\sqrt{2} + 1) \approx 0.17$) та $a(T) \approx 5.2 \cdot 10^{-4}$. Результати моделювання $\mathcal{P}_T(y)$ показані на рисунку 3.4.

Також зауважимо, що для моделювання одностороннього експоненціального розподілу ми поклали $\alpha_+ = 5/4$, $b_+ = 1$, $c_+ = 2/3$ і $\alpha_- = 7/4$, $b_- = 1$, $c_- = 1/3$ (за таких умов $l_1 = 20/9$); а для моделювання двостороннього експоненціального розподілу взято $\alpha_+ = 2$, $b_+ = 3/2$, $c_+ = 2/3$ і $\alpha_- = 2$, $b_- = 3$, $c_- = 1/3$ (що дає $l_1 = 0$). Ці експоненціальні залежності наведено на рисунку 2.2. Для моделювання симетричної ситуації, яку показано на рис. 2.3, окрім вказаних в тексті хвостових параметрів $\alpha_{\pm} = 1/2$ і $\alpha_{\pm} = 3/2$, ми поклали $b_{\pm} = 1$ і $c_{\pm} = 1/2$.

Висновки до розділу 3

1. Застосовуючи методи інтегральних перетворень та комплексного інтегрування, отримано низку альтернативних представлень граничних густин ймовірності масштабованого значення розглядуваного процесу. Зокрема, знайдено їх подання у термінах оберненого перетворення Мелліна, перетворення Лапласа, H -функцій Фокса та швидко збіжних степеневих рядів. Ці результати дозволили показати, що граничні густини ймовірності будуть правильно нормованими, невід'ємними та унімодальними розподілами, дослідити їх поведінку при великих та малих значеннях змінної, а також записати часткові випадки граничних густин через добре відомі спеціальні функції.

2. Запропоновано альтернативні методи знаходження асимптотичних розв'язків для надповільних польотів Леві. Дані підходи базуються на використанні узагальненої центральної граничної теореми та методу субординаційних рівнянь Ланжевена. Отримані результати повністю співпадають із розподілами, що знайдено в рамках теорії Монтролла-Вейсса, і розвивають теоретичні методи опису процесів із надповільною еволюцією.

3. Показано, що у режимі рідкісних флюктуацій розподіли оригінальних (немасштабованих) польотів Леві завжди матимуть важкі гілки з хвостовим індексом, що рівний мінімальному хвостовому індексу відповідної густин ймовірності довжин стрибків випадкових блукань. Таким чином, при будь-яких значеннях часу даний стохастичний процес буде характеризуватися нескінченною дисперсією, яка є наслідком можливості випадкових блукань здійснювати довгі стрибки.

4. Використовуючи метод інверсії, представлено алгоритм числового моделювання масштабованих надповільних польотів Леві. Результати проведеного числового моделювання цілком підтвердили всі аналітично отримані граничні густини ймовірності.

Основні результати цього розділу опубліковано в статтях [1–3]

РОЗДІЛ 4

РЕЖИМИ РЕЛАКСАЦІЇ У ДВОРІВНЕВИХ СИСТЕМАХ

Релаксаційні процеси описують переходи макроскопічної системи між рівноважними положеннями і містять важливу інформацію про загальні механізми релаксації. Найчастіше релаксаційні процеси вивчаються для систем, що піддаються впливу узагальненої сили, яка випадковим чином перемикається [44]. У такому випадку однією із найбільш важливих характеристик досліджуваного процесу є зовнішня термодинамічна змінна, спряжена із узагальненою силою. У якості прикладу можна привести магнітну релаксацію [321–323], де відповідною парою спряжених змінних будуть зовнішнє магнітне поле та магнітний момент системи, або діелектричну релаксацію [46, 324, 325], для якої спряженими змінними є зовнішнє електричне поле та електричний дипольний момент.

При цьому, нагадаємо, що окрім класичної дебаєвської релаксації, для якої зміна релаксаційної функції $\mu(t)$ пропорційна до її величини, тобто відповідний закон релаксації має вигляд $\mu(t) = \mu_0 \exp(-t/T)$, де $\mu_0 = \mu(0)$ і T – характерний час релаксації, існує багато систем з аномальною, неекспоненціальною релаксацією [30, 32, 54, 146]. Наприклад, релаксація в неупорядкованих середовищах, склі, діелектрична релаксація в полімерах описується уповільненою експоненціальною функцією $\mu(t) = \mu_0 \exp[-(t/T)^\gamma]$ ($0 < \gamma < 1$), яку ще називають законом Кольрауша-Уільямса-Уоттса. Також процес релаксації для деяких явищ, таких як захват електронів, електронно-діркова рекомбінація, перенос енергії у тілах із складною структурою при великих часах добре описується експоненціально-логарифмічною функцією $\mu(t) \sim \exp[-\gamma \ln^\beta(t/T)]$, де γ и β – додатні параметри. Даний тип релаксації більш повільний, ніж закон Кольрауша-Уільямса-Уоттса, і при $\beta = 1$ описує дуже важливий клас законів релаксації із степеневою релаксаційною функцією $\mu(t) \sim (t/T)^{-\gamma}$. Водночас для деяких процесів, наприклад, грануляції, адсорбції-десорбції, механічної напруги чи ієрархічної динаміки, релаксація в системі може проявляти і надповільні (в частковому випадку – логарифмічні) властивості.

Особливу увагу приділяють вивченню релаксаційних процесів для систем, чиї властивості повністю задаються властивостями їх структурних елементів (таких, як дифузійні частинки, мономолекулярні магніти, однодоменні феромагнітні наночастинки тощо). Важливим класом такого роду систем являються дворівневі системи, для яких стан складових елементів змінюються згідно дихотомічного процесу [100–102], оскільки вони є зручною апроксимаційною моделлю для дуже широкого класу складних систем. При чому дворівневість може бути пов'язана із “включеним/виключеним” станом системи, внутрішнім станом об'єкту (наприклад, переключенням напрямку намагніченості частинки чи режиму флюорисценції), рухом частинки у просторі (наприклад, зміною напрямку броунівському руху) та іншими фізичними характеристиками.

У даному розділі, використовуючи теорію неперервних у часі випадкових блукань, ми побудуємо модель для релаксаційного процесу в дворівневих системах та знайдемо рівняння, що описують закони релаксації в них. Крім того, ми детально дослідимо асимптотичні розв'язки релаксаційних рівнянь у випадку, коли релаксація проявляє аномальні властивості із степеневою статистикою Леві або надповільною статистикою.

4.1. Опис релаксаційної моделі та основні рівняння

Розглянемо систему, що складається из великої кількості одинакових об'єктів, кожен із яких протягом випадкового проміжку часу перебуває в одному із двох можливих рівноважних положень. Цікавим та наглядним прикладом такого роду систем є системи одноосних однодоменних феромагнітних наночастинок. У кожної наночастинки вектор намагніченості має два рівноважних напрямки, проте у зв'язку із тепловими флюктуаціями цей вектор може приймати довільні напрямки. Як наслідок, динаміка вектора намагніченості стає випадковою та може бути описана стохастичним рівнянням Ландау-Ліфшиця (або Ландау-Ліфшиця-Гільберта). При цьому необхідні статистичні властивості визначаються із відповідного рівняння Фоккера-Планка для густини ймо-

вірності напрямку намагніченості [70, 322, 326, 327]. Зокрема, в рамках даного підходу вдається наближено описати вплив на магнітну релаксацію диполь-дипольної взаємодії частинок [328–330] та обертового зовнішнього магнітного поля [331, 332].

В силу того, що цей метод являється загальним, вивчення релаксації в системі може бути доволі складним, якщо необхідно враховувати всі можливі напрямки вектора намагніченості. Однак при зменшенні температури ймовірність напрямків вектора намагніченості, відмінних від рівноважних, зменшується. Таким чином, якщо загальна ймовірність таких напрямків доволі мала, то динаміка вектора намагніченості може наближено бути описана дихотомічним випадковим процесом. Як буде показано далі, дихотомічна апроксимація дає можливість без зайвих труднощів детально дослідити явище релаксації для широкого класу дворівневих систем.

4.1.1. Виведення релаксаційного рівняння

В рамках дихотомічного наближення стан кожного структурного елемента системи зв’язується з дихотомічним процесом $f(t)$ (див. рис. 4.1). Згідно визначенню, цей процес протягом випадкових проміжків часу $\{\tau_n\}$ ($n = \overline{1, \infty}$) приймає значення $+1$ або -1 , і $f(0) = 1$ в початковий момент часу $t_0 = 0$. Часи очікування $\{\tau_n\}$ розподілені із густинами ймовірності $p^\pm(\tau_n)$, де знаки “ \pm ” відносяться до розподілів часів очікування у станах ± 1 відповідно (тобто для τ_n із непарним/парним індексом n).

Опишемо метод знаходження закону релаксації. Відмітимо, що запропонований підхід базується не на динамічних, а на суто ймовірністних міркуваннях. А саме, на відміну від стохастичного рівняння Ланжевена та пов’язанного з ним рівняння Фоккера-Планка, ми будемо використовувати концепцію неперервних у часі випадкових блукань. Під релаксаційною функцією будемо розуміти усе-

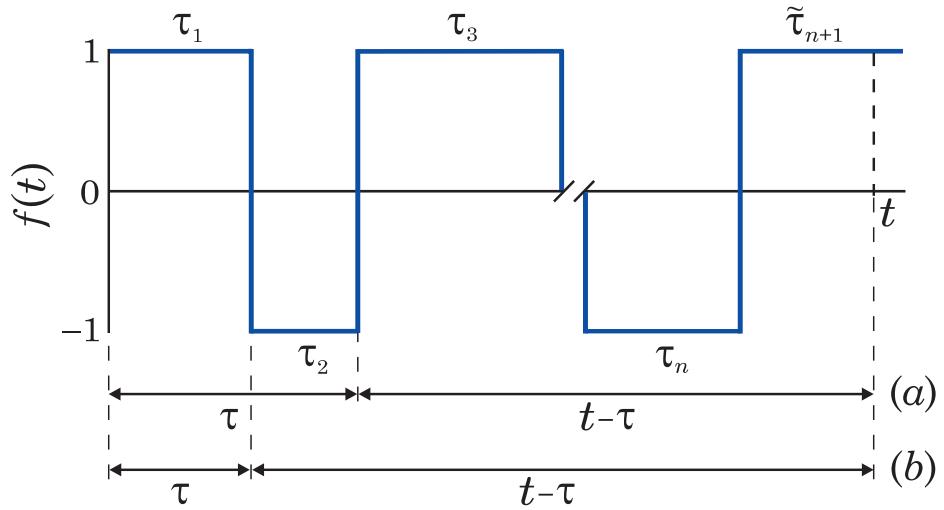


Рис. 4.1. Схематичне зображення дихотомічного процесу $f(t)$ з парним числом змін знаку на інтервалі $(0, t]$. Також тут показано розбиття часового інтервалу $(0, t]$ для несиметричного (a) та симетричного (b) випадку (див. додаток Б з альтернативним виведенням релаксаційного рівняння).

реднення дихотомічного процесу $f(t)$, тобто

$$\mu(t) = \langle f(t) \rangle, \quad (4.1)$$

де кутові дужки означають усереднення по всім прийнятним траєкторіям процесу. Беручи до уваги, що для кожного t функція $f(t)$ приймає лише значення $+1$ або -1 , визначення (4.1) можна переписати як

$$\mu(t) = \langle f(t) = +1 \rangle + \langle f(t) = -1 \rangle. \quad (4.2)$$

Оскільки $f(t) = +1$ для парного числа стрибків (zmін знака) функції $f(t)$ і $f(t) = -1$ – для непарного, формула (4.2) приймає вигляд

$$\mu(t) = \Pr \{f(t) = +1\} - \Pr \{f(t) = -1\} \quad (4.3)$$

Тут $\Pr \{\cdot\}$ задає ймовірність події у фігурних дужках. Вводячи ймовірність $W^{(n)}(t)$ того, що за час t процес $f(t)$ здійснив рівно n ($n = \overline{1, \infty}$) стрибків,

записуємо

$$\begin{aligned}\Pr \{f(t) = +1\} &= \sum_{m=0}^{\infty} W^{(2m)}(t), \\ \Pr \{f(t) = -1\} &= \sum_{m=0}^{\infty} W^{(2m+1)}(t).\end{aligned}\quad (4.4)$$

Зазначимо, якщо кількість стрибків функції $f(t)$ за час t дорівнює нулю ($n = 0$), то перший час очікування $\tau_1 > t$ і, відтак, ймовірність відсутності стрибка дается формуллою

$$W^{(0)}(t) = \int_t^{\infty} d\tau_1 p^+(\tau_1). \quad (4.5)$$

Нехай процес $f(t)$ має точно n ($n \geq 1$) стрибків у інтервалі $(0, t]$. Якщо ці стрибки відбуваються в інтервалах $(\sum_{j=1}^k \tau_j, \sum_{j=1}^k \tau_j + d\tau_k)$ із $k = \overline{1, n}$, то ймовірність $dW^{(n)}(t)$ такої події має вигляд

$$dW^{(n)}(t) = \left(\prod_{j=1}^n d\tau_j p_j(\tau_j) \right) \int_{\tilde{\tau}_{n+1}}^{\infty} d\tau p_{n+1}(\tau), \quad (4.6)$$

де $p_j(\tau_j) = p^+(\tau_j)$ або $p_j(\tau_j) = p^-(\tau_j)$, якщо j – непарне або парне число відповідно, а тому

$$p_j(\tau_j) = p^{(-)^{j+1}}(\tau_j) \quad (4.7)$$

$(j = \overline{1, \infty})$. Нижня межа інтегрування в формулі (4.6) задається виразом

$$\tilde{\tau}_{n+1} = t - \sum_{j=1}^n \tau_j \leq \tau_{n+1} \quad (4.8)$$

і дорівнює останньому часу очікування системи в кінцевому положенні, тобто до моменту переривання процесу в час t . Цей час інколи ще називають зворотнім часом відновлення (backward recurrence time) [131, 333, 334], який грає важливу

роль в різних задачах пов'язаних з теорією відновлення.

Тут доречно зауважити, що рівняння (4.6) записано з урахуванням умови, що стрибки $f(t)$ є незалежними подіями з ймовірностями $p_j(\tau_j)d\tau_j$ того, що $(n+1)$ -й стрибок відбувається за межами інтервалу $(0, t]$. Щоб уникнути непорозуміння, ми зазначимо, що часи τ_j в рівнянні (4.6) (і в виразах для ймовірностей нижче) слід інтерпретувати не як випадкові величини, а як змінні інтегрування. Далі, водячи n -вимірну область інтегрування $\Omega_n(t)$, що задає допустимі значення часів очікування, ми записуємо ймовірність $W^{(n)}(t)$ у формі (див. [335, 336])

$$W^{(n)}(t) = \int_{\Omega_n(t)} \left(\prod_{j=1}^n d\tau_j p_j(\tau_j) \right) \int_{\tilde{\tau}_{n+1}}^{\infty} d\tau p_{n+1}(\tau_{n+1}). \quad (4.9)$$

Замінимо нижню межу інтегрування в (4.9) значенням (4.8) та врахуємо, що область інтегрування $\Omega_n(t)$ задається умовою

$$\sum_{j=1}^n \tau_j \leq t. \quad (4.10)$$

Тоді можна показати, що перший інтеграл в (4.9) по області $\Omega_n(t)$ дається виразом

$$\int_{\Omega_n(t)} \prod_{j=1}^n d\tau_j p_j(\tau_j) = \int_0^t d\tau_1 p_1(\tau_1) \int_0^{t-\tau_1} d\tau_2 p_2(\tau_2) \dots \int_0^{t-\sum_{j=1}^{n-1} \tau_j} d\tau_n p_n(\tau_n). \quad (4.11)$$

Як ми бачимо, даний вираз за своєю структурою є n -кратною згорткою густини $p_1(t)$ та ймовірностей $\int_0^t d\tau_j p_j(\tau_j)$ ($j = \overline{2, n}$). Таким чином, з урахуванням

виразу (4.7), формула (4.9) переписується в наступній розгорнутий формі

$$\begin{aligned} W^{(n)}(t) = & \int_0^t d\tau_1 p^+(\tau_1) \int_0^{t-\tau_1} d\tau_2 p^-(\tau_2) \cdots \\ & \times \int_0^{t-\sum_{j=1}^{n-1} \tau_j} d\tau_n p^{(-)^{n+1}}(\tau_n) \int_{t-\sum_{j=1}^n \tau_j}^\infty d\tau_{n+1} p^{(-)^{n+2}}(\tau_{n+1}). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Далі застосуємо до рівняння (4.3) перетворення Лапласа. Нагадаємо, що для відповідної функції $\psi(t)$ воно задається формулою

$$\mathcal{L}\{\psi(t)\} = \psi_s = \int_0^\infty dt e^{-st} \psi(t), \quad (4.13)$$

де $\operatorname{Re} s > 0$. Отже, з урахуванням формули (4.4), маємо

$$\mu_s = \sum_{m=0}^\infty W_s^{(2m)} - \sum_{m=0}^\infty W_s^{(2m+1)} \quad (4.14)$$

Тепер, використовуючи правило перетворення Лапласа для згортки функцій, що дається рівністю $\mathcal{L}\left\{\int_0^t dt' \psi(t') \phi(t-t')\right\} = \psi_s \phi_s$, неважко знайти перетворення Лапласа, відповідно, для ймовірностей (4.5) та (4.9)

$$\begin{aligned} W_s^{(2m)} &= (p_s^+ p_s^-)^m \frac{1-p_s^+}{s}, \\ W_s^{(2m+1)} &= (p_s^+ p_s^-)^m p_s^+ \frac{1-p_s^-}{s}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

де $m = \overline{0, \infty}$.

Нарешті, підставляючи формули (4.15) в рівняння (4.14) та підсумовуючи виникаючі нескінчені геометричні прогресії, знаходимо перетворення Лапласа для закону релаксації

$$\mu_s = \frac{1}{1 - p_s^+ p_s^-} \left(\frac{1-p_s^+}{s} - p_s^+ \frac{1-p_s^-}{s} \right) \quad (4.16)$$

I, посилаючись на вищезгадане правило для згортки функції, із останньої формули слідує, що релаксаційна функція задовільняє інтегральне рівняння

$$\begin{aligned}\mu(t) & - \int_0^t d\tau \mu(\tau) \int_0^{t-\tau} d\tau' p^+(\tau') p^-(t-\tau-\tau') \\ & = \int_t^\infty d\tau p^+(\tau) - \int_0^t d\tau p^+(\tau) \int_{t-\tau}^\infty d\tau' p^-(\tau').\end{aligned}\quad (4.17)$$

Легко побачити, якщо має місце симетрична релаксація, тобто $p^\pm(\tau) = p(\tau)$, то рівняння (4.16) і (4.17) спрощуються та приймають, відповідно, вигляд

$$\mu_s = \frac{1}{1 + p_s} \frac{1 - p_s}{s}, \quad (4.18)$$

$$\mu(t) + \int_0^t d\tau \mu(\tau) p(t-\tau) = \int_t^\infty d\tau p(\tau). \quad (4.19)$$

Рівняння (4.17) та (4.19) – це інтегральні рівняння Вольтерри 2-го роду з різницевим ядром [337], які є ключовими для теорії відновлення [334]. Оскільки чисельні методи їх розв’язання добре відомі [338, 339], то рівняння (4.17) та (4.19) зручні для числового дослідження поведінки функції $\mu(t)$ при кінцевих значеннях часу. У той час як із представлень (4.16) та (4.18) доцільно виходити при аналітичному вивчені поведінки $\mu(t)$ у випадку великих значень часу. Також звернемо увагу, що із інтегральних рівнянь (4.17) і (4.19) випливає важливий результат: в загальному випадку релаксаційні процеси у дворівневих системах характеризуються ефектами пам’яті. Іншими словами, стан системи в кожний момент часу залежить від усіх попередніх моментів.

У додатку Б представлено альтернативне виведення рівнянь (4.17) і (4.19). Це виведення є дещо складнішим, але воно не використовує метод перетворення Лапласа, а тому є більш прямим. У зв’язку з цим альтернативний підхід дозволяє краще зрозуміти структуру та інтерпретацію інтегральних рівнянь. Так, рівняння (4.17) має таку просту інтерпретацію: релаксаційна функція $\mu(t)$ до-

рівнює різниці ймовірності того, що процес $f(t)$ не здійснив жодного стрибка, і ймовірності, що процес $f(t)$ здійснив рівно один стрибок, плюс середнє значення процесу $f(t)$ при умові, що він здійснив більше одного стрибка. В той же час рівняння (4.19) має наступну інтерпретацію: в кожен момент часу значення релаксаційної функції $\mu(t)$ дорівнює різниці ймовірності того, що процес $f(t)$ не здійснив жодного стрибка та середнього значення $f(t)$ при умові, що був хоча б один стрибок $f(t)$. Відмітимо, що сильні ефекти пам'яті в даній моделі визначаються інтегральними членами в рівняннях (4.19) і (4.17), які задають відгук системи на зовнішній вплив.

4.2. Асимптотична поведінка законів релаксації

Розглянемо поведінку закону релаксації у дворівневих системах при великих значеннях часу для класу розподілів $p^\pm(\tau)$ з важкими і надважкими хвостами. Вибір цього класу функцій обумовлений тим, що, як вже зазначалося, вони грають провідну роль в системах з аномальними властивостями. Ми будемо детально вивчати як несиметричний випадок ($p^+(\tau) \neq p^-(\tau)$), так і симетричний ($p^+(\tau) = p^-(\tau)$).

4.2.1. Важкі хвости розподілів часів очікування

Нагадаємо, що густини ймовірності $p^\pm(\tau)$ називаються важкими, якщо асимптотична поведінка їх хвостів при $\tau \rightarrow \infty$ задається формулою

$$p^\pm(\tau) \sim \frac{q_\pm}{\tau^{1+\alpha_\pm}}, \quad (4.20)$$

де $q_\pm > 0$ і хвостовий параметр $\alpha_\pm \in (0, 2]$. Обмеження на значення α_\pm обумовлено тим, що в такому випадку всі моменти (в тому числі дробові) порядку $\eta \geq \alpha_\pm$ для густин $p^\pm(\tau)$ будуть нескінченними. Отже, ці густини завжди мають нескінчуна дисперсію, середнє ж значення нескінченнє лише, якщо $\alpha_\pm \in (0, 1]$.

Також нагадаємо, що згідно з тауберовою теоремою Карамати, поведінка $\mu(t)$ при великих t буде задаватися поведінкою μ_s при малих значеннях s . Більш точно ця теорема каже, що якщо, починаючи з певної точки, функція $\lambda(t)$ монотонна і

$$\lambda_s \sim \frac{1}{s^\gamma} L\left(\frac{1}{s}\right) \quad (4.21)$$

при $s \rightarrow 0$, то

$$\lambda(t) \sim \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} L(t) \quad (4.22)$$

при $t \rightarrow \infty$. Тут $\text{Res} > 0$, $\gamma > 0$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функція і $L(\cdot)$ – функція, що повільно змінюється на нескінченності, тобто $L(\nu t) \sim L(t)$ при $t \rightarrow \infty$ для всіх $\nu > 0$.

Рівняння (4.16) показує, що поведінка μ_s при $s \rightarrow 0$ визначається поведінкою $p^\pm(\tau)$ при $s \rightarrow 0$. Перепишемо його у вигляді

$$\mu_s = \frac{\phi_s^+ - \phi_s^- + \phi_s^+ \phi_s^-}{s(\phi_s^+ + \phi_s^- - \phi_s^+ \phi_s^-)}, \quad (4.23)$$

де введено позначення $\phi_s^\pm = 1 - p_s^\pm$. Відомо, що для густин з асимптотичною поведінкою, що задається (4.20), справедливими є формули (див., наприклад, [36])

$$\phi_s^\pm \sim \begin{cases} \frac{q_\pm \Gamma(1-\alpha_\pm)}{\alpha_\pm} s^{\alpha_\pm}, & \alpha_\pm \in (0, 1), \\ q_\pm s \ln \frac{1}{s}, & \alpha_\pm = 1, \\ \bar{\tau}_\pm s - \frac{q_\pm \Gamma(2-\alpha_\pm)}{\alpha_\pm(\alpha_\pm-1)} s^{\alpha_\pm}, & \alpha_\pm \in (1, 2), \\ \bar{\tau}_\pm s - \frac{q_\pm}{2} s^2 \ln \frac{1}{s}, & \alpha = 2_\pm. \end{cases} \quad (4.24)$$

Тут ми ввели $\bar{\tau}_\pm$ – середній час перебування системи в верхньому/нижньому положеннях.

Ми будемо проводити аналіз для випадку $\alpha_+ < \alpha_-$, тобто $p^+(\tau) \gg p^-(\tau)$

при великих τ . Якщо ж $\alpha_+ > \alpha_-$, то у всіх отриманих формулах потрібно просто поміняти місцями індекси “+” і “−”, а також замінити функцію $\mu(t)$ на $-\mu(t)$. Ситуацію з $\alpha_+ = \alpha_-$, але $q_+ \neq q_-$, ми не розглядаємо, так як в цьому разі необхідно знати додаткові члени розкладу $p^\pm(\tau)$ на нескінченості.

1) $\alpha_+ \in (0, 1]$

Якщо $\alpha_+ \in (0, 1]$, то із рівняння (4.23) з урахуванням (4.24) слідує, що $\mu_s \sim 1/s$ ($s \rightarrow 0$), а тому $\mu(t) \sim 1$ ($t \rightarrow \infty$). Для знаходження характеру прямування $\mu(t)$ до одиниці розглянемо допоміжну функцію $h(t) = 1 - \mu(t)$, для якої $h_s \sim 1/s - \mu_s$. Таким чином, отримуємо

$$h_s = \frac{2(\phi_s^- - \phi_s^+ \phi_s^-)}{s(\phi_s^+ + \phi_s^- - \phi_s^+ \phi_s^-)} \quad (4.25)$$

і звідси знаходимо при $s \rightarrow 0$

$$h_s \sim \frac{2\phi_s^-}{s\phi_s^+}. \quad (4.26)$$

Так як $\alpha_+ \in (0, 1]$ і $\alpha_+ < \alpha_-$, то в даному випадку можливі ситуації: (a) $\alpha_\pm \in (0, 1)$; (b) $\alpha_+ \in (0, 1)$ і $\alpha_- = 1$; (c) $\alpha_+ \in (0, 1)$ і $\alpha_- \in (1, 2]$; (d) $\alpha_+ = 1$ і $\alpha_- \in (1, 2]$. Використовуючи рівності (4.24), (4.26) і тауберову теорему (формули (4.21)–(4.22)), отримуємо відповідно для (a), (b), (c) і (d) асимптотики закону релаксації

$$\mu(t) \sim 1 - \frac{2q_- \alpha_+ \Gamma(1 - \alpha_-)}{q_+ \alpha_- \Gamma(1 - \alpha_+) \Gamma(1 + \alpha_+ - \alpha_-)} t^{\alpha_+ - \alpha_-}, \quad (4.27)$$

$$\mu(t) \sim 1 - \frac{2q_- \alpha_+ \sin(\pi \alpha_+)}{\pi q_+} \ln(t) t^{\alpha_+ - 1}, \quad (4.28)$$

$$\mu(t) \sim 1 - \frac{2\bar{\tau}_- \alpha_+ \sin(\pi \alpha_+)}{\pi q_+} t^{\alpha_+ - 1}, \quad (4.29)$$

$$\mu(t) \sim 1 - \frac{2\bar{\tau}_-}{q_+} \frac{1}{\ln t}. \quad (4.30)$$

Зрозуміло, що для випадку (a) формулу релаксації (4.27) легко записати у вигляді $\mu(t) \sim 1 - (t/T_1)^{\alpha_+ - \alpha_-}$, ввівши час релаксації

$$T_1 = \left(\frac{q_+ \alpha_- \Gamma(1 - \alpha_+) \Gamma(1 + \alpha_+ - \alpha_-)}{2q_- \alpha_+ \Gamma(1 - \alpha_-)} \right)^{1/(\alpha_+ - \alpha_-)}. \quad (4.31)$$

Для випадку (b) формула (4.28) переписується як $\mu(t) \sim 1 - \ln(t)(t/T_2)^{\alpha_+ - 1}$ із часом релаксації

$$T_2 = \left(\frac{\pi q_+}{2q_- \alpha_+ \sin(\pi \alpha_+)} \right)^{1/(\alpha_+ - 1)}. \quad (4.32)$$

Відмітимо, що у останньому виразі множник $\ln(t)$ не містить T_2 , це повязано з тим, що $\ln(t) \sim \ln(t/\sigma)$ при великих t для будь-яких $\sigma > 0$. Крім того, неважко переконатися, що при великих t виконується нерівність $t^{-a} \ll \ln(t) \ll t^a$ для $a > 0$. Таким чином, швидкість спадання функції $\ln(t)t^{\alpha_+ - 1}$ є проміжною між $t^{\alpha_+ - 1 - \epsilon}$ та $t^{\alpha_+ - 1 + \epsilon}$ для як завгодно малих значень $\epsilon > 0$, а тому закон (4.28) є перехідний між степеневими законами. Для випадку (c) закон релаксації (4.29), очевидно, також має степеневу форму $\mu(t) \sim 1 - (t/T_3)^{\alpha_+ - 1}$ з часом релаксації

$$T_3 = \left(\frac{\pi q_+}{2\bar{\tau}_- \alpha_+ \sin(\pi \alpha_+)} \right)^{1/(\alpha_+ - 1)}. \quad (4.33)$$

Водночас для випадку (d) із формули (4.30) слідує, що $\mu(t) \sim \mu(t/T_4)$ при $t \rightarrow \infty$ для будь-яких додатніх значень T_4 . Отже, за цих умови для процесу при великих значеннях часу не існує характерного релаксаційного часу T_4 і в системі проявляється надповільна релаксація. На перший погляд це доволі несподіваний результат, оскільки надповільна релаксація спостерігається за умов, коли часи очікування розподілені із важкими степеневими густинами. Існування такого закону продиктовано тим, що головний член розкладу ϕ_s^+ є сингулярним.

2) $\alpha_+ \in (1, 2]$

Дослідимо тепер асимптотичну поведінку закону релаксації при $\alpha_+ \in (1, 2)$ (а тому $\alpha_- \in (1, 2]$). Відмітимо, що випадок $\alpha_+ = 2$ ми поки що не розглядаємо, оскільки $\alpha_+ < \alpha_-$ і це призводить до виконання умови $\alpha_- > 2$ і, як наслідок, дисперсія $p^-(\tau)$ була б скінченою. Підставляючи необхідні формули із (4.24) в вираз (4.23), приходимо до висновку, що $\mu_s \sim [(\bar{\tau}_+ - \bar{\tau}_-) / (\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-)](1/s)$ ($s \rightarrow 0$), а значить $\mu(t) \sim (\bar{\tau}_+ - \bar{\tau}_-) / (\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-)$ ($t \rightarrow \infty$). Отже, для визначення характеру прямування закону релаксації $\mu(t)$ до кінцевого значення доцільно ввести допоміжну функцію $h(t) = (\bar{\tau}_+ - \bar{\tau}_-) / (\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-) - \mu(t)$, для якої переворення Лапласа має вигляд

$$h_s = \frac{2(-\bar{\tau}_-\phi_s^+ + \bar{\tau}_+\phi_s^- - \bar{\tau}_+\phi_s^+\phi_s^-)}{s(\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-)(\phi_s^+ + \phi_s^- - \phi_s^+\phi_s^-)}. \quad (4.34)$$

Аналогічно попередньому випадку, використовуючи тауберову теорему (4.21)–(4.22) і відповідні асимптотики (4.24), отримуємо

$$\mu(t) \sim \frac{\bar{\tau}_+ - \bar{\tau}_-}{\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-} - \frac{2\bar{\tau}_-q_+}{(\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-)^2\alpha_+(\alpha_+ - 1)}t^{1-\alpha_+}. \quad (4.35)$$

Зауважимо, що у разі, коли тільки одна густина ймовірності, скажімо $p^-(\tau)$ (так як ми домовилися досліджувати релаксацію при $p^+(\tau) \gg p^-(\tau)$ для значних τ), має скінченну дисперсію і середнє значення рівне $\bar{\tau}_-$, а хвости $p^+(\tau)$ – важкі, то формулі (4.29), (4.30) і (4.35) залишаються в силі. Зазначимо також, що за допомогою асимптотики із останнього рядку в формулі (4.24) і допоміжної функції $h(t) = \int_0^t d\tau [(\bar{\tau}_+ - \bar{\tau}_-) / (\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-) - \mu(t)]$ неважко переконатися, що співвідношення (4.35) виконується і для параметру $\alpha_+ = 2$, якщо розподіл $p^-(\tau)$ має скінченну дисперсію.

Як ми бачимо, закон релаксації (4.35) має степеневий вигляд $\mu(t) \sim \mu(\infty) - (t/T_5)^{1-\alpha_+}$ з кінцевим значенням $\mu(\infty) = (\bar{\tau}_+ - \bar{\tau}_-) / (\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-)$ та з

часом релаксації

$$T_5 = \left(\frac{(\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-)^2 \alpha_+ (\alpha_+ - 1)}{2\bar{\tau}_- q_+} \right)^{1/(1-\alpha_+)}. \quad (4.36)$$

Величина $\mu(\infty) \neq \pm 1$, а тому процес $f(t)$ при $t \rightarrow \infty$ не прямує до одного із своїх рівноважних станів. Кажучи більш точно, на нескінченності ймовірність знайти процес $f(t)$ у стані $+1$ на $(\bar{\tau}_+ - \bar{\tau}_-) / (\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-)$ більша, ніж у стані -1 .

Цікаво відмітити, що у рамках запропонованого вище підходу не вдається безпосередньо визначити характер поведінки $\mu(t)$ при великих значеннях часу для дихотомічного процесу $f(t)$, який характеризується густинами $p^\pm(\tau)$ з кінцевою дисперсією. Це пов'язано з тим, що в цьому випадку $\mu(t)$ буде прямувати до кінцевого значення набагато швидше, ніж степенева функція, а тому тауберова теорема Карамати не може бути застосована. Тим не менш, за допомогою цієї теореми із рівняння (4.23) неважко встановити, що релаксаційна функція завжди прямує до значення $\mu(\infty) = (\bar{\tau}_+ - \bar{\tau}_-) / (\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-)$ за умови, що $\tau_\pm < \infty$.

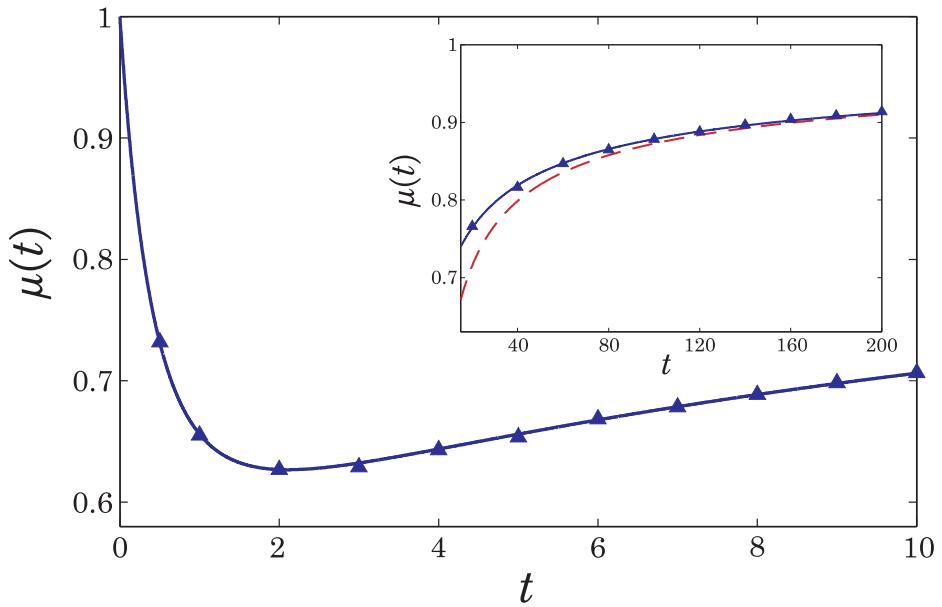


Рис. 4.2. Закон релаксації у випадку, коли $\alpha_+ = 0.5$ і $\alpha_- = 1.5$. Суцільна лінія відповідає точному закону релаксації $\mu(t)$, отриманому за допомогою розв'язку інтегрального рівняння (4.17); трикутники відповідають результатам числового моделювання; а пунктирна лінія відповідає асимптотичній формулі (4.29).

На рисунку 4.2 у якості ілюстрації наведено графік закона релаксації у

випадку, коли хвостові параметри $\alpha_+ \in (0, 1]$ і $\alpha_- \in (1, 2]$. Для проведення розрахунків ми використовували важкі густини ймовірності часів очікування наступного виду

$$p^\pm(\tau) = \frac{\alpha_\pm}{(1 + \tau)^{1+\alpha_\pm}}. \quad (4.37)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (4.17) знайдено з допомогою відомого методу квадратур [338, 339], а асимптотична поведінка отримана із формули (4.29), де з урахуванням вибраних густин $p^\pm(\tau)$ необхідні параметри даються рівностями $q_+ = \alpha_+$ і $\bar{\tau}_- = 1/(\alpha_- - 1)$. На додаток числове моделювання здійснено з використанням запропонованого в підрозділі 3.7 методу для $N = 10^5$ реалізацій процесу $f(t)$. Як бачимо, аналітичні та числові результати знаходяться в дуже гарному співвідношенні. Інші закони релаксації цього підрозділу також чисельно досліджувались, але для уникнення зайвої громіздкості ми обмежилися лише одним прикладом.

Тепер звернемо увагу на симетричну ситуацію, тобто релаксацію дихотомічного процесу при $p^\pm(\tau) = p(\tau)$. Із рівняння (4.18), приймаючи до уваги, що $\phi_s = 1 - p_s$, маємо

$$\mu_s = \frac{\phi_s}{s(2 - \phi_s)}. \quad (4.38)$$

Використовуючи асимптотики (4.24), у випадку $\alpha \in (0, 1)$ отримуємо $\mu_s \sim q\Gamma(1 - \alpha)/(2\alpha s^{1-\alpha})$ при $s \rightarrow 0$ і на основі оберненого перетворення Лапласа знаходимо

$$\mu(t) \sim \frac{q}{2\alpha} t^{-\alpha} \quad (4.39)$$

при $t \rightarrow \infty$. Тобто ми отримали степеневу релаксацію $\mu(t) \sim (t/T_6)^{-\alpha}$ з часом релаксації

$$T_6 = \left(\frac{q}{2\alpha}\right)^{1/\alpha}. \quad (4.40)$$

Далі, скільки при $\alpha = 1$ має місце співвідношення $\mu_s \sim (q/2) \ln(1/s)$ ($s \rightarrow 0$), то у цьому разі тауберова теорема не може бути застосована для знаходження $\mu(t)$. Тим не менш, вона може бути використана у відношенні до функції $h(t) = \int_0^t d\tau \mu(\tau)$, чиє перетворення Лапласа дається виразом $h_s = \mu_s/s$. Із цього слідує, що $h(t) \sim (q/2) \ln t$ при $t \rightarrow \infty$ і, так як $\mu(t) = dh(t)/dt$, ми переконуємося, що і випадок $\alpha = 1$ також описується асимптотичною формулою (4.39). Аналогічно, вводячи допоміжну функцію $h(t) = \bar{\tau}/2 - \int_0^t d\tau \mu(\tau)$ і використовуючи вираз $\mu(t) = -dh(t)/dt$, неважко перевірити, що ця формула справедлива для $\alpha \in (1, 2]$. Значить, будь-яка дворівнева система з важкими хвостами розподілів часів очікування в симетричному випадку демонструє повільну степеневу релаксацію (4.39). Типова поведінка закону релаксації в симетричному випадку показана на рисунку (4.3).

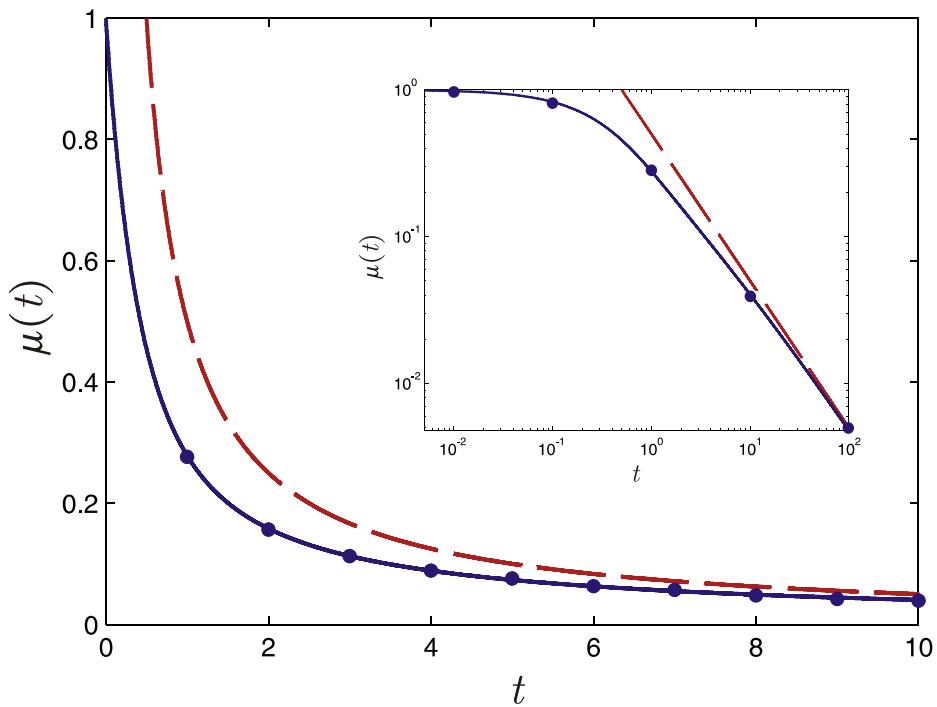


Рис. 4.3. Закон релаксації у симетричному випадку з розподілом $p(\tau)$, що дається формулою (4.37) з $\alpha_{\pm} = \alpha = 1$. Суцільна лінія відповідає точному закону релаксації $\mu(t)$, знайденому із інтегрального рівняння (4.19); кружечки показують результати числового моделювання; а пунктирна лінія отримана із асимптотичної формули (4.39).

В даному підрозділі отримано всі можливі закони релаксації в дворівневій системі, що характеризується важкими розподілами $p^{\pm}(\tau)$ часів очікува-

ння процесу $f(t)$ в рівноважних станах. За цих умов для більшості випадків релаксаційні закони в асимптотичному режимі ($t \rightarrow \infty$) характеризуються степеневою поведінкою

$$\mu(t) \sim \mu_\infty - (t/T)^{-\beta} \quad (4.41)$$

з відповідними величинами граничного значення μ_∞ , часу релаксації T та хвостового індексу β . Такі степеневі релаксаційні закони слідують із рівнянь (4.27), (4.29), (4.35), а для симетричного випадку (4.39), очевидно, що $\mu(t) \sim (t/T)^{-\beta}$. Разом з тим формула (4.28) відповідає модифікованій степеневій релаксації, а формула (4.30) – оберненій логарифмічній, про які ми поговоримо в наступному підрозділі.

Як зазначалося в розділі 1, степенева поведінка є дуже розповсюдженою для аномальних явищ різної природи і взагалі – визначальною для процесів із статистикою Леві. Так, асимптотична релаксаційна залежність (4.41) спостерігається для дробового броунівського руху [340, 341], діелектричної релаксації полярних молекул [69, 70], динаміки надохолоджених рідин [342], оборотних бімолекулярних хімічних реакцій [59, 343, 344], процесів випадкової адсорбції [64, 65, 345–348] і т.д. Відмітимо, що при цьому для конкретної системи наявні в рівнянні (4.41) параметри чітко задаються властивостями моделі.

4.2.2. Надважкі хвости розподілів часів очікування

Аналогічно до підрозділу 2.1 надважкі густини ймовірності характеризуються тим, що їх асимптотична поведінка при $\tau \rightarrow \infty$ описується виразом

$$p^\pm(\tau) \sim \frac{\varrho_\pm(\tau)}{\tau}. \quad (4.42)$$

В цьому виразі $\varrho_\pm(\tau)$ – функції, що повільно змінюються на нескінченості. Задля збереження умови нормування густин $p^\pm(\tau)$ на $\varrho_\pm(\tau)$ накладається умова

$$\varrho_{\pm}(\tau) = o(1/\ln \tau) \text{ при } \tau \rightarrow \infty.$$

Для подальшого дослідження, як і раніше, зручно ввести функції

$$V^{\pm}(\tau) = \int_t^{\infty} d\tau p^{\pm}(\tau), \quad (4.43)$$

рівні ймовірності того, що часи очікування процесу $f(t)$ в верхньому/нижньому положеннях перевищують t . Використовуючи правило Лопітала, неважко показати, що $\lim_{t \rightarrow \infty} V^{\pm}(\nu t)/V^{\pm}(t) = 1$ для довільного $\nu > 0$, тобто функції $V^{\pm}(t)$ також відносяться до класу тих, що повільно змінюються на нескінченості. Далі, використовуючи властивості функцій, що повільно змінюються на нескінченості [301, 302], неважко переконатися, що при $s \rightarrow \infty$

$$\phi_s^{\pm} = sV_s^{\pm} = \int_0^{\infty} d\tau e^{-\tau} V^{\pm}(\tau/s) \sim V^{\pm}(1/s). \quad (4.44)$$

Як і у разі важких хвостів, проведемо розрахунки для $p^+(\tau) \gg p^-(\tau)$. В протилежному випадку в отриманих формулах слід помінти місцями індекси “+” і “−”, а функцію $\mu(t)$ замінити на $-\mu(t)$. Так як із цих припущень випливає $V^+(1/s) \gg V^-(1/s)$ при $s \rightarrow 0$, то із формул (4.44) і (4.23) слідує, що $\mu(t) \sim 1$ при великих значеннях часу. Таким чином, ми знову приходимо до необхідності використовувати допоміжну функцію $h(t) = 1 - \mu(t)$ і асимптотичне співвідношення (4.26). Підставляючи в нього формулу (4.44) і застосовуючи тауберову теорему (4.21)–(4.22), отримуємо $h_s \sim 2V^-(1/s)[sV^+(1/s)]^{-1}$, а значить закон релаксації

$$\mu(t) \sim 1 - \frac{2V^-(t)}{V^+(t)}. \quad (4.45)$$

Як приклад розглянемо клас розподілів часів очікування, що даються густинами ймовірності [187, 194]

$$p^{\pm}(\tau) = \frac{(r_{\pm} - 1) \ln^{r_{\pm}-1} \eta_{\pm}}{(\eta_{\pm} + \tau) \ln^{r_{\pm}} (\eta_{\pm} + \tau)} \quad (4.46)$$

з параметрами $r_{\pm} > 1$ ($r_+ < r_-$, так як ми вважаємо, що при великих τ $p^+(\tau) \gg p^-(\tau)$) і $\eta_{\pm} > 1$, що гарантує додатність та нормованість $p^{\pm}(\tau)$. За цих умов ймовірності

$$V^{\pm}(t) = \left(\frac{\ln \eta_{\pm}}{\ln(\eta_{\pm} + t)} \right)^{r_{\pm}-1}, \quad (4.47)$$

а значить із виразу (4.45) отримуємо

$$\mu(t) \sim 1 - \frac{2 \ln^{r_--1} \eta_-}{\ln^{r_+-1} \eta_+} \frac{1}{\ln^{r_--r_+} t}. \quad (4.48)$$

При $r_- - r_+ = 1$ остання рівність дає обернений логарифмічний закон

$$\mu(t) \sim 1 - \frac{\tilde{\eta}}{\ln t}, \quad (4.49)$$

де ми поклали $\tilde{\eta} = 2 \ln^{r_--1} \eta_- / \ln^{r_+-1} \eta_+$.

В той же час у симетричному випадку $p^{\pm}(\tau) = p(\tau)$ формули (4.38) і (4.44) приводять до виразу $\mu_s \sim 1/(2s)V(1/s)$ при $s \rightarrow \infty$. Із цієї асимптотики на основі тауберової теореми отримуємо

$$\mu(t) \sim \frac{1}{2} V(t) \quad (4.50)$$

при $t \rightarrow \infty$. Наприклад, якщо задати

$$p(\tau) = \frac{\ln \eta}{(\eta + \tau) \ln^2(\eta + \tau)} \quad (4.51)$$

($\eta > 1$), то ймовірність $V(t) = \ln \eta / \ln(\eta + t)$ і вираз (4.50) дає обернену логарифмічну релаксацію

$$\mu(t) \sim \frac{\ln \eta}{2 \ln t}. \quad (4.52)$$

Для симетричних релаксаційних процесів (формули (4.39) та (4.50)) функ-

ція $\mu(\infty) \neq \pm 1$, тобто процес $f(t)$ з часом не прямує до одного із своїх рівноважних станів ($+1$ або -1). Таким чином, система постійно буде здійснювати стрибки між верхнім і нижнім положенням, і часи перебування в кожному із них будуть одного порядку. А оскільки $\mu(\infty) = 0$, то це означає, що з плином часу ймовірність знайти процес $f(t)$ в верхньому або нижньому положенні буде рівна $1/2$.

Зауважимо, що оскільки умова $\lim_{t \rightarrow \infty} t^a V^\pm(t) = \infty$ зберігається для всіх $a > 0$, то в формулах (4.45) та (4.50) функція $\mu(t)$ прямує до граничного значення повільніше, ніж будь-яка степенева. Через це релаксаційні процеси з такою асимптотичною поведінкою ми називаємо надповільними. Більш того, надповільні релаксаційні закони (4.45) та (4.50) (як і формула (4.30)) характеризуються тим, що $\mu(t) \sim \mu(t/T)$ для будь-якого $T > 0$ при $t \rightarrow \infty$. Тобто для цих законів в асимптотичному режимі типовий час релаксації є невизначенім.

На перший погляд, на відміну від степеневої поведінки, надповільні релаксаційні закони та закони, що містять логарифмічні функції, є доволі незвичними. Однак вони знаходять широке застосування при побудові теоретичних моделей та поясненні спостережуваних даних, пов'язаних із різноманітними процесами поглинання та ущільнення. Для розуміння деяких механізмів, що призводять до такої надповільної еволюції стохастичних систем, слідуючи роботі [85], ми розглянемо просте евристичне пояснення оберненої логарифмічної залежності для моделі, що описує процес ущільнення гранул.

Нехай маємо ансамбль однакових сферичних частинок об'ємом \mathcal{V} та середньою густинорою ρ , які поміщені у вібраторний циліндричний резервуар. Під середньою густиною розуміється відношення об'єму, який займають частинки, до всього об'єму резервуару. Часи очікування між послідовними коливаннями резервуару досить велики, щоб частинки встигли прийти у спокій перед наступним коливанням. Позначимо через \mathcal{V}_0 об'єм пустого простору, що приходиться на одну частинку, тоді $\rho = \mathcal{V}/(\mathcal{V} + \mathcal{V}_0)$ або, що альтернативно, $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}(1 - \rho)/\rho$. Помістимо кульки в уявний ящик, розміри якого набагато більші за їх діаметр. Для того, щоб число кульок в ящику збільшилося на одиницю, частина кульок в

ньому повинна перегрупуватися таким чином, що звільнити об'єм для ще однієї. Нехай це число дорівнює \mathcal{N} , тоді $\mathcal{N}\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}$, а тому $\mathcal{N} = \rho/(1 - \rho)$. Якщо рух частинок нескорельований, то час \mathcal{T} , який витрачається на таке перегрупування, буде зростати експоненціально із збільшенням \mathcal{N} , тобто $\mathcal{T} \sim e^{\mathcal{N}}$. Швидкість зміни густини ρ буде пропорційно об'єму пустого простору, який припадає на одну частинку, та обернено пропорційно до часу, що витрачається на перегрупування частинок. Таким чином, $d\rho/dt \propto \mathcal{V}_0/\mathcal{T}$ і звідси отримуємо рівняння

$$\frac{d\rho}{dt} = (1 - \rho)e^{-\rho/(1-\rho)}, \quad (4.53)$$

наближеним розв'язком якого при $t \rightarrow \infty$ є

$$\rho(t) \simeq 1 - \frac{1}{\ln t}. \quad (4.54)$$

Як ми бачимо, залежність (4.54) відповідає релаксаційній формулі (4.49) з $\tilde{\eta} = 1$, а також формулі (4.30) з $2\bar{\tau}/q_+ = 1$.

Зокрема, дана релаксаційна залежність була експериментально підтверджена при дослідженні процесу ущільнення гранул монодисперсного скла у вібруючій циліндричній трубі [84, 97, 98]. Виходячи не із евристичних, а більш фундаментальних засад, рівняння (4.53) може бути отримано на основі теорії середнього поля [87] або теорії ієрархічних кінетичних рівнянь [86] при дослідженні процесів адсорбції-десорбції, ущільнення гранульованих матеріалів, кінетики осаджених на лінійних поверхнях матеріалів. Точніший розв'язок цієї моделі показує, що релаксація до кінцевого значення при великих значеннях часу буде слідувати закону [86, 87]

$$\rho(t) \simeq 1 - \frac{1}{\ln(t \ln t)}. \quad (4.55)$$

Крім того, за дещо видозмінених умов релаксаційна поведінка у згадуваних

системах підпорядковується залежності [86]

$$\rho(t) \simeq 1 - \frac{1}{\ln[2t \ln^2(2t)]} \quad (4.56)$$

$(t \gg 1)$.

Неважко переконатися, що формули (4.55) і (4.56) випливають із закону надповільної релаксації (4.45), якщо покласти

$$V^+(t) \sim \frac{1}{\ln^{r-1}(t \ln t)}, \quad V^-(t) \sim \frac{1}{\ln^r(t \ln t)} \quad (4.57)$$

та

$$V^+(t) \sim \frac{1}{\ln^{r-1}[2t \ln^2(2t)]}, \quad V^-(t) \sim \frac{1}{\ln^r[2t \ln^2(2t)]} \quad (4.58)$$

відповідно (параметр $r > 1$). Зрозуміло, що асимптотичну поведінку відповідних густин ймовірності $p^\pm(\tau)$ можна отримати із співвідношення $p^\pm(\tau) = -(d/d\tau)V^\pm(\tau)$.

Порівняння асимптотичної поведінки релаксаційної функції $\mu(t)$ у симетричному випадку для важких та надважких хвостів розподілів часів очікування $p(\tau)$ показано на рисунку 4.4. Як ми бачимо, релаксаційна функція $\mu(t)$ у режимі надповільної релаксації прямує до нуля набагато повільніше, ніж у режимі повільної релаксації.

Модифіковані степеневі режими релаксації

Вивчимо тепер ситуацію, коли хвіст лише однієї густини ймовірності, скажімо $p^+(\tau)$, являється надважким. В цьому випадку необхідно окремо розглянути три різних характери поведінки $p^-(\tau)$: (a) важкий хвіст з $\alpha_- \in (0, 1)$; (b) важкий хвіст з $\alpha_- = 1$; (c) $p^-(\tau)$ має скінченне середнє значення $\bar{\tau}_-$. Очевидно, що до випадку (c) входять як важкі розподіли $p^-(\tau)$ з $\alpha_- \in (1, 2]$, так і розподіли із скінченою дисперсією. Для випадку (a) достатньо підставити необхідні асимптотики (4.24) і (4.44) в формулу (4.26), щоб на основі тауберової

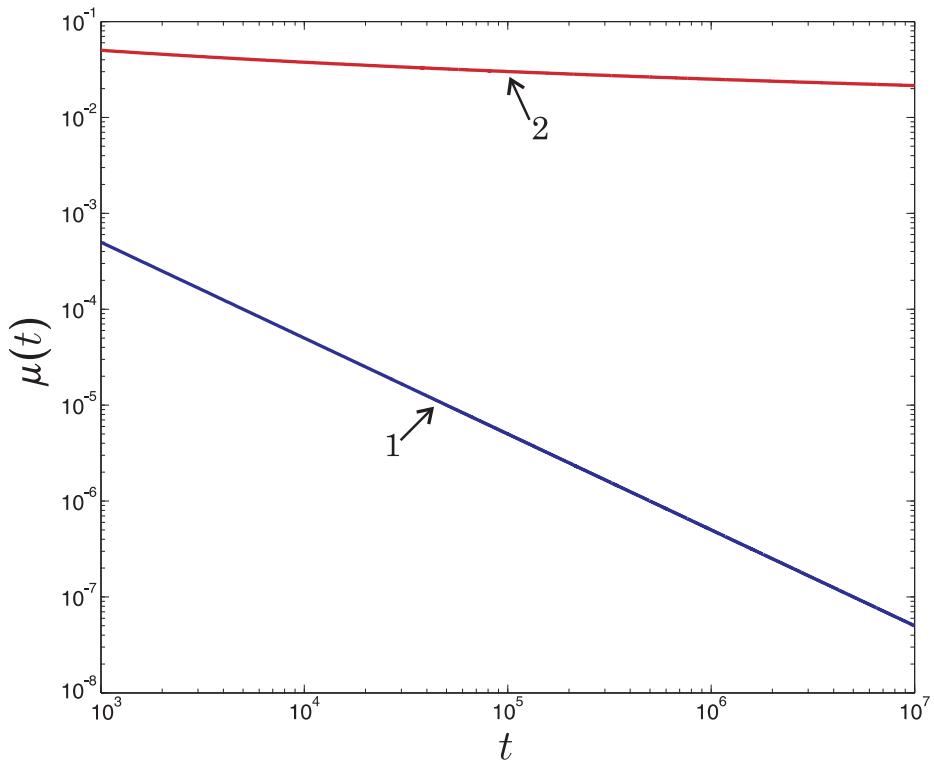


Рис. 4.4. Асимптотична поведінка релаксаційної функції $\mu(t)$ для режимів повільної степеневої та надповільної релаксації. Лінія 1 показує повільну степеневу релаксацію (4.39) з параметрами $q = 1$ та $\alpha = 1$, а лінія 2 відповідає надповільній релаксації (4.52) з $\eta = 2$.

теореми отримати

$$\mu(t) \sim 1 - \frac{2q_- t^{-\alpha_-}}{\alpha_- V^+(t)}. \quad (4.59)$$

В ситуації (b) і (c) задамо допоміжну функцію $h(t) = \int_0^t d\tau [1 - \mu(\tau)]$, для якої при малих s виконується співвідношення

$$h_s \sim \frac{2\phi_s^-}{s^2 \phi_s^+}. \quad (4.60)$$

При отриманні останньої формулі ми врахували вираз (4.23). Звідси для випадку (b) знаходимо

$$\mu(t) \sim 1 - \frac{2q_-}{V^+(t)t} \left[1 + \frac{t \ln(t) p^+(t)}{V^+(t)} \right], \quad (4.61)$$

а для випадку (c)

$$\mu(t) \sim 1 - \frac{2\bar{\tau}_- p^+(t)}{[V^+(t)]^2}. \quad (4.62)$$

Звернемо увагу, що в формулі (4.59) фігурують два залежних від часу члена асимптотичного розкладу $\mu(t)$. Це пов'язано з тим, що для різних густин ймовірності $p^+(\tau)$ основний вклад в вираз $1 - \mu(t)$ може вносити кожен із цих членів, або обидва мати одинаковий порядок малості. Наприклад, якщо вибрати розподіли $p^+(\tau)$ такі, що ймовірність відсутності стрибка рівна $V^+(t) = 1/\ln \ln t$, $1/\ln t$ і $\exp(-\ln t/\ln \ln t)$, то для рівняння (4.59) основний вклад в квадратних дужках буде задаватися першим, обома (оскільки другий член на нескінченості прямує до одиниці) і другим членом відповідно.

Отже, відмічаємо що модифіковані степеневі релаксаційні режими (4.59), (4.61) і (4.62) даватимуться асимптотичною залежністю

$$\mu(t) \sim 1 - \frac{U(t)}{(t/T)^\beta} \quad (4.63)$$

з відповідним хвостовим індексом β , часом релаксації T та $U(t)$ – функцією, що повільно змінюється на нескінченості. Якщо задати надважкий розподіл $p^+(\tau)$ у вигляді (4.46), то бачимо, що при великих значеннях часу ці закони подаються у вигляді модифікованої спепеневої функції

$$\mu(t) \sim 1 - \frac{\ln^\zeta t}{(t/T)^\vartheta}, \quad (4.64)$$

де $\zeta = r_+ - 1$, $\vartheta = \alpha_-$ для (4.59); $\zeta = r_+ - 1$, $\vartheta = 1$ для (4.61); $\zeta = r_+ - 2$, $\vartheta = 1$ для (4.62); а типовий час релаксації T визначається із відповідної асимптотики $\mu(t)$ з урахуванням формули (4.46). Клас релаксаційних законів (4.64), зокрема, є характерним для процесів випадкової адсорбції на одно- та багатошарових поверхнях [347, 349, 350]. Такі моделі використовуються для опису процесів ущільнення та злипання колоїдних частинок або протеїнів на твердих поверхнях тощо.

В таких моделях відповідні параметри залежать від характеристик системи: розмірності простору, просторової структури гранул, особливостей адсорбуючої поверхні і т.д. Більш того, в залежності від цих параметрів релаксація в таких системах буде проявляти суттєво різну еволюцію: степеневу, модифікованою степеневу чи надповільну. Всі ці три класи залежностей відносять до так званих функцій, які правильно змінюються на нескінченості (regularly varying functions) [301, 302] і добре описуються в рамках представленої в роботі концепції. Це пов'язано з тим, що процес поглинання гранул зручно інтерпретується з точки зору дворівневої апроксимації: система може бути в нижньому стані (якщо жодної гранули не поглинуто) та в верхньому (якщо всі гранули поглинуто), а адсорбція-десорбція є випадковим процесом з певними часами очікування в можливих станах. Ікаво зазначити, що процеси випадкової адсорбції беруть свій початок від пionерських досліджень А. Рені [351, 352], який розглядав послідовну адсорбцію однакових лінійних сегментів в одновимірному просторі (“car parking problem”) (див. огляди [64, 348]).

Зауважимо, що у випадках модифікованої степеневої поведінки (4.59), (4.61) та (4.62) спостерігаються перехідні режими між степеневою релаксацією з різними хвостовими індексами, не зважаючи на те, що часи перебування в одному із станів (для приведених розрахунків – у верхньому) розподілені із надважкими густинами. Це випливає з того факту, що для додатнього параметру a і будь-якої функції $L(t)$, що повільно змінюється на нескінченості, має місце спiввiдношення $t^{-a} \ll L(t) \ll t^a$ при $t \rightarrow \infty$ [301, 302]. Отже, ці релаксаційні функції будуть обмежені степеневими законами: $1 - 1/t^{\theta-\epsilon} < \mu(t) < 1 - 1/t^{\theta+\epsilon}$, де параметр $\theta = \alpha_-$ для випадку (4.59) та $\theta = 1$ для випадків (4.61) і (4.62), а величина $\epsilon > 0$ приймає як завгодно малі значення. Тобто на фіксованих інтервалах функції, що повільно змінюються на нескінченості, ведуть себе майже як константа, а тому такі релаксаційні закони і називатимемо модифікованими степеневими.

На рисунку 4.5 показано приклад поведінки закону релаксації у випадку, коли густина ймовірності $p^+(\tau)$ характеризується надважким хвостом, а

густини $p^-(\tau)$ – важким хвостом з параметром $\alpha_- \in (1, 2]$ (формула (4.29)). Розв’язок інтегрального рівняння (4.17) і метод чисельного моделювання аналогічний попередньому підрозділу.

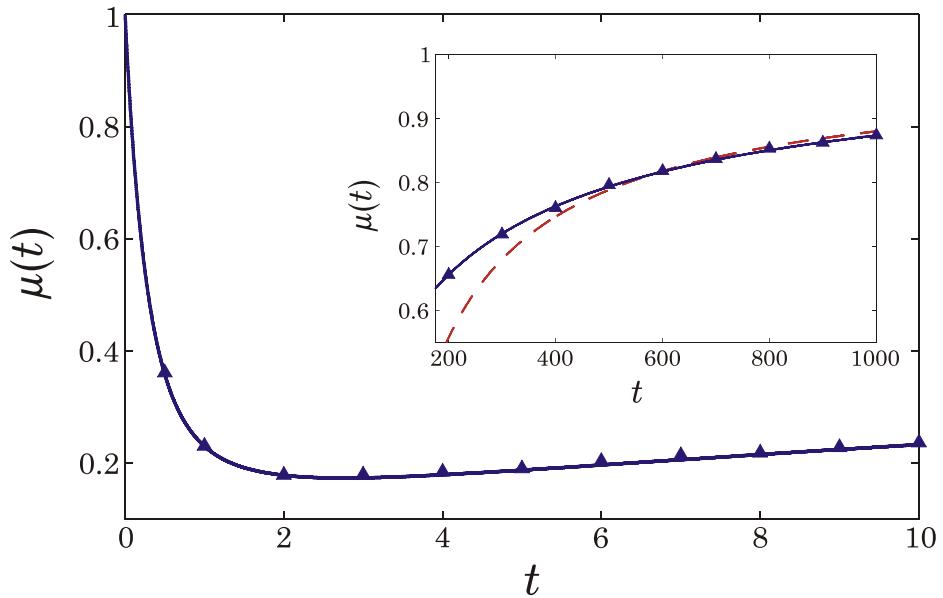


Рис. 4.5. Закон релаксації у випадку, коли густина $p^+(\tau)$ має надважкий хвіст і задається формулою (4.51) з $\eta = 2$, а $p^-(\tau)$ має вигляд (4.37) і важкий хвіст з індексом $\alpha_- = 1.5$. Суцільна лінія відповідає точному закону релаксації $\mu(t)$, отриманому за допомогою розв’язання інтегрального рівняння (4.17); трикутники показують результати числового моделювання; а пунктирна лінія відповідає асимптотичній формулі (4.61).

4.2.3. Дробове рівняння для недебаєвської релаксації

В рамках представленого в роботі формалізму дробове релаксаційне рівняння для $\mu(t)$ слідує із загального закону (4.18), якщо у якості розподілу часів очікування взяти густину Міттаг-Леффлера [311] $p(\tau) = -\frac{d}{d\tau} E_\alpha[-\frac{1}{2}(\tau/\tilde{T})^\alpha]$ з індексом $\alpha \in (0, 1)$ і масштабним параметром \tilde{T} , що пов’язаний з часом релаксації. Зазначимо, що точні релаксаційні закони, що зумовлюються розподілами Міттаг-Леффлера ми розглянемо в наступному розділі. Ця густина ймовірності має важкі хвости $p(\tau) \sim q/\tau^{1+\alpha}$ з параметром

$q = 2\alpha \tilde{T}^\alpha / \Gamma(1 - \alpha)$. Таким чином, її перетворення Лапласа

$$p_s = \frac{1}{1 + 2\tilde{T}^\alpha s^\alpha}, \quad (4.65)$$

а тому

$$\mu_s = \frac{1}{s + \tilde{T}^{-\alpha} s^{1-\alpha}}. \quad (4.66)$$

Далі введемо дробову похідну Рімана-Ліувілля [319]

$${}_0\mathcal{D}_t^{-\alpha} \mu(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{dt'}{(t - t')^{1-\alpha}} \mu(t'). \quad (4.67)$$

та візьмемо до уваги, що $\mathcal{L}\left\{{}_0\mathcal{D}_t^{-\alpha} \mu(t)\right\} = s^{-\alpha} \mu_s$. Таким чином, вираз (4.66) зводиться до дробового релаксаційного рівняння

$$\mu(t) - 1 = -\tilde{T}^{-\alpha} {}_0\mathcal{D}_t^{-\alpha} \mu(t), \quad (4.68)$$

розв'язком якого є

$$\mu(t) = E_\alpha \left[-(t/\tilde{T})^\alpha \right]. \quad (4.69)$$

Зauważимо, що при $\alpha = 1$ така релаксація зводиться до експоненціальної.

Нагадаємо, що $E_\alpha(z)$ – функція Міттаг-Леффлера [313, 314, 353], що у класичному поданні задається рядом

$$E_\alpha(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}. \quad (4.70)$$

Відомо, що функція (4.69) характеризується поведінкою

$$E_\alpha \left[-(t/\tilde{T})^\alpha \right] \sim \exp \left[-\frac{(t/\tilde{T})^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \right] \quad (4.71)$$

при $t/\tilde{T} \ll 1$ та

$$E_\alpha \left[-(t/\tilde{T})^\alpha \right] \sim \frac{(t/\tilde{T})^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (4.72)$$

при $t/\tilde{T} \gg 1$, що узгоджується з симетричним релаксаційним законом (4.39), якщо покласти $\tilde{T} = [q\Gamma(1-\alpha)/(2\alpha)]^{1/\alpha}$.

Таким чином, відмічаємо, що даний режим релаксації характеризується законом Кольрауша-Уіллямса-Уоттса при малих значеннях часу та степеневою поведінкою при великих. Приведемо вирази для $\mu(t)$ до стандартної форми, а саме: $\mu(t) \sim \exp[-(t/T_{\text{short}})^\alpha]$ з часом $T_{\text{short}} = \tilde{T}[\Gamma(1+\alpha)]^{1/\alpha}$ ($t/\tilde{T} \ll 1$) та $\mu(t) \sim (t/T_{\text{long}})^{-\alpha}$ з часом $T_{\text{long}} = \tilde{T}/[\Gamma(1-\alpha)]^{1/\alpha}$ ($t/\tilde{T} \gg 1$). Тобто після подання асимптотик закону релаксації для малих та великих значень часу через елементарні функції ми бачимо, що в загальному випадку формально часи релаксації для недебаєвських процесів змінюються при переходах між режимами. Отже, отримані в підрозділі 4.2 типові часи релаксації слід вважати асимпточними часами релаксації, оскільки для різних функцій $\mu(t)$ поведінка при $t \rightarrow \infty$ може бути однаковою, а при малих значеннях t – різною (див., наприклад, рис. 5.4 у розділі 5).

Іншим методом релаксаційне рівняння (4.68) виводиться із дробового рівняння Фоккера-Планка для полярних молекул, що здійснюють обертальний броунівський рух [69–71]. При цьому вираз (4.69) буде описувати релаксацію середнього значення дипольного моменту в системі, а функція (4.69) точно приводити до рівняння Коула-Коула [30, 46, 67, 69–71]. Відмітимо, що рівняння Коула-Коула вперше було емпірично встановлено у 1941 році [68] при поясненні експериментальних даних стосовно релаксації полярних діелектриків. Згідно з ним залежність комплексної сприйнятливості χ від частоти ω зовнішнього змінного поля (при його включені) дається виразом

$$\frac{\chi(\omega)}{\chi_0} = \frac{1}{1 + (i\omega\tilde{T})^\alpha}, \quad (4.73)$$

де $\chi_0 = \text{Re}\chi(0)$ і визначається, виходячи із параметрів конкретної моделі. Це рівняння можна отримати, використавши отриманий закон релаксації (4.69) та теорію лінійного відгуку [69, 70] з якої випливає, що

$$\frac{\chi(\omega)}{\chi_0} = \int_0^\infty dt e^{-i\omega t} \left[-\frac{d\mu(t)}{dt} \right] = 1 - i\omega \int_0^\infty dt e^{-i\omega t} \mu(t). \quad (4.74)$$

Далі приймемо до уваги, що $\mu(t) = E_\alpha \left[-(t/\tilde{T})^\alpha \right]$, а тому $\mathcal{L} \left\{ E_\alpha \left[-(t/\tilde{T})^\alpha \right] \right\} = 1/(s + \tilde{T}^{-\alpha} s^{1-\alpha})$. І, поклавши $s = i\omega$, із (4.74) знаходимо вираз (4.73).

Дробові релаксаційні рівняння, що описують несиметричну релаксацію можна знайти, діючи аналогічним способом. Проте в цих випадках дробові рівняння матимуть суттєво складнішу структуру, а отримані залежності міститимуть узагальнений ряд функцій Міттаг-Леффлера (див. підрозділ 5.3). Втім, враховуючи той факт, що нас головним чином цікавлять асимптотичні релаксаційні закони, доцільно знайти просте дробове рівняння для ефективної релаксаційної функції $\mu_{\text{eff}}(t)$, яка буде еквівалентною встановленим релаксаційним законам при великих значеннях часу, тобто $\mu_{\text{eff}}(t) \sim \mu(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Знайдемо такі асимптотичні дробові рівняння для несиметричних степеневих залежностей, що даються формулами (4.27), (4.29) і (4.35). Випадки, що приводять до модифікованої степеневої та надповільної поведінки ми розглядали не будемо, оскільки навіть в асимптотичному режимі для них не існує простого дробового релаксаційного рівняння. Відштовхуючись від асимптотик $\mu(t)$ і формули (4.72), неважко зрозуміти, що для $p^+(\tau) \gg p^-(\tau)$ необхідна ефективна релаксаційна функція Міттаг-Леффлера має вигляд

$$\mu_{\text{eff}}(t) = \mu_\infty - E_\beta \left[-(t/T_{\text{eff}})^\beta \right]. \quad (4.75)$$

Тут для формули (4.27) – $\mu_\infty = 1$, $T_{\text{eff}} = T_1[\Gamma(1-\beta)]^{1/\beta}$ і $\beta = \alpha_- - \alpha_+$; для формули (4.29) – $\mu_\infty = 1$, $T_{\text{eff}} = T_3[\Gamma(1-\beta)]^{1/\beta}$ і $\beta = 1 - \alpha_+$; а для формули (4.29) – $\mu_\infty = (\bar{\tau}_+ - \bar{\tau}_-) / (\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-)$, $T_{\text{eff}} = T_5[\Gamma(1-\beta)]^{1/\beta}$ і $\beta = \alpha_+ - 1$. Нагадаємо, що часи $T_{1,3,5}$ даються виразами (4.31), (4.33) і (4.36) відповідно.

Далі, враховуючи співвідношення ${}_0\mathcal{D}_t^{-\beta}[1] = t^\beta / \Gamma(1 + \beta)$ [319], встановлюємо, що шукане дробове релаксаційне рівняння для ефективної релаксаційної функції у несиметричному випадку записується як

$$\mu_{\text{eff}}(t) - \frac{T_{\text{eff}}^{-\beta} \mu_\infty}{\Gamma(1 + \beta)} t^\beta = -T_{\text{eff}}^{-\beta} {}_0\mathcal{D}_t^{-\beta} \mu_{\text{eff}}(t). \quad (4.76)$$

В той же час із (4.39) і (4.68) випливає, що симетрична ефективна релаксаційна функція $\mu_{\text{eff}}(t)$ задовільняє рівняння (4.68), якщо покласти $\mu(t) = \mu_{\text{eff}}(t)$ і $\tilde{T} = T_{\text{eff}} = T_6[\Gamma(1 - \alpha)]^{1/\alpha}$, де T_6 задається формулою (4.40).

Недебаєвські релаксаційні режими

Звернемо увагу, що недебаєвські релаксаційні режими часто пояснюються виходячи із ідеї, що макроскопічна релаксація в системі є результатом суперпозиції класичних дебаєвських процесів із різними незалежними випадковими релаксаційними часами для окремих структурних елементів системи [49, 69–71]. Таким чином, функція, що описує процес релаксації в системі, є усередненням дебаєвського спадання відносно випадкового часу релаксації T'

$$\mu(t) = \langle e^{-t/T'} \rangle = \int_0^\infty dT' e^{-t/T'} \rho(T'), \quad (4.77)$$

де $\rho(T')$ – розподіл часів релаксації T' .

Така проста інтерпретація недебаєвських режимів є зручною для описання відомих експериментальних релаксаційних законів Коула-Коула [68], Коула-Девідсона [354], Гаврільяка-Негамі [355, 356] тощо. А втім, дане представлення не прийнятне в загального випадку. Зокрема, із формули (4.77) бачимо, що в рамках цієї концепції не вдається описати немотононні режими релаксації.

Іншим зручним підходом опису недебаєвських релаксаційних патернів є метод субординаційних випадкових процесів (див. підрозділ 1.3.3), що пов’язані з класом безмежно подільних розподілів [105]. Нагадаємо, що випадкова величина є нескінченно подільною, якщо її можна подати через суму (з будь-якою кількістю членів) незалежних і однаково розподілених випадкових величин. По-

яснимо коротко ідею цього методу, оскільки в деяких важливих випадках він дозволяє отримати аналогічні до представлених в дисертаційній роботі результати. Згідно з концепцією субординаційних випадкових процесів фізичний час t після реномізації вважається залежним від внутрішнього (операційного) часу v . Отже, в системі маємо випадковий процес $t(v)$, що відповідає за фізичний час t та має розподіл $F(t, v)$, та обернений до нього випадковий процес $v(t)$, що відповідає за операційний час і має розподіл $G(v, t)$.

В попередньому підході, що виражається формулою (4.77), процес релаксації в системі був суперпозицією незалежних дебаєвських процесів. Однак, якщо диполі взаємодіють між собою або з навколошнім середовищем, то їх вклад в релаксацію в системі не буде експоненціальний. В роботах [357, 358] дебаєвський релаксаційний режим вважають випадковим та залежним не від фізичного часу t , а від операційного v . Таким чином, релаксаційний закон записується як

$$\phi(t) = \int_0^\infty dv \phi_D(v) G(v, t) = \int_0^\infty dv e^{-\lambda v} G(v, t), \quad (4.78)$$

де параметр λ визначається мікрокопічними властивостями системи (наприклад, задаватися гамільтоніаном взаємодії чи золотим правилом Фермі).

Для безмежно подільного процесу $t(v)$ із формулі Леві-Хінчіна слідує співвідношення [105] $\langle e^{-st(v)} \rangle = e^{-v\Psi(s)}$, де $\Psi(s)$ – показник Лапласа (субордінатор). При цьому функція $\Psi(s)$ має бути невід'ємною з початковим значенням $\Psi(0) = 0$ та похідною $d\Psi(s)/ds$, яка є цілком монотонною функцією (completely monotonic function). Функції з такими властивостями відносяться до класу функцій Бернштейна [359]. Виходячи з зазначених передумов, можна показати, що релаксаційне рівняння матиме вигляд [357, 358]

$$\phi(t) = 1 - \lambda \int_0^t dv M(t-v)\phi(v). \quad (4.79)$$

де $M(t) = \mathcal{L}^{-1}\{1/\Psi(s)\}$ – функція пам'яті.

Субординаційний підхід особливо зручний при описанні аномальних релак-

саційних процесів, що задаються степеневими густинами ймовірності чи сумішю різних випадкових процесів. Ключовим для даного підходу є необхідність знання відповідного субординатору $\Psi(s)$ для безмежно подільного процесу $t(v)$. В багатьох випадках такі субординатори відомі, оскільки пов'язані з важливими розподілами, а саме: гауссовим, оберненим гауссовим, α -стійким розподілом Леві, полегшеним (tempered) α -стійким розподілом Леві, експоненціальним, гамма-розподілом, складеним (compound) розподілом Пуассона, розподілами Парето, Лінника, Міттаг-Леффлера тощо [105].

Звернемо увагу, що представлений у роботі метод прийнятний для будь-яких несиметричних та симетричних дворівневих систем і не апелює до необхідності використання саме класу безмежно подільних розподілів. Цей факт дозволяє досліджувати релаксацію також і в системах, що не пов'язані з такими розподілами або для яких знаходження субординатору є складною задачею. Водночас в частковому випадку, якщо система характеризується симетричною релаксацією, а густина ймовірності $p(\tau)$ така, що її перетворення Лапласа

$$p_s = \frac{1}{1 + 2\Psi(s)/\lambda}, \quad (4.80)$$

релаксаційне рівняння (4.19) зводиться до (4.79) (з точністю до позначень). Наприклад, якщо взяти субординатор Леві $\Psi(s) = s^\alpha$ та параметр інтенсивності $\lambda = \tilde{T}^{-\alpha}$, то формула (4.80) задає густину Міттаг-Леффлера (4.65).

Приведемо обґрунтування, що представлення (4.80) дійсно відповідає густині ймовірності в просторі Лапласа. Нехай маємо цілком монотонну функцію $f_1(s)$ та невід'ємну функцію $f_2(s)$ з цілком монотонною похідною. Нагадаємо, що функція $f_1(s)$ є цілком монотонною, якщо $(-1)^n(d^n/ds^n)f_1(s) \geq 0$ для $n = \overline{0, \infty}$. Із формулі Фаа-ді-Бруно [360] для похідної від композиції функцій випливає, що функція $f_1[f_2(s)]$ також є цілком монотонною. Поклавши $f_1(s) = 1/(1 + s)$ та $f_2(s) = 2\Psi(s)/\lambda$, бачимо, що формула (4.80) визначає цілком монотонну функцію. А тому із теореми Бернштейна [105] випливає, що функція $p(\tau) = \mathcal{L}^{-1}\{p_s\}$ є густиною ймовірності.

Висновки до розділу 4

1. На основі теорії неперервних у часі випадкових блукань побудовано модель релаксаційних процесів у дворівневих системах, для яких структурні елементи є незалежними один від одного, а їх властивості змінюються згідно з дихотомічним випадковим процесом. Отримано інтегральне рівняння, що описує процес релаксації в зазначених системах і показує, що в загальному випадку система є нелокальною у часі, а тому проявляє ефекти пам'яті та аномальну поведінку.

2. Знайдено асимптотичну у часі поведінку законів релаксації для досліджуваних процесів за умови, що густини ймовірності часів очікування системи в “верхньому” та “нижньому” станах мають важкі та/або надважкі хвости. Проведено класифікацію отриманих асимптотичних розв’язків, із якої слідує, що релаксаційні закони будуть універсальними для даного типу систем і в залежності від параметрів розподілів часів очікування проявлятимуть степеневу, модифіковану степеневу або надповільну еволюцію.

3. Зазначено зв’язок отриманих результатів з відомими підходами до опису недебаєвських релаксаційних режимів, а також наведено приклади фізичних систем, у яких спостерігаються часткові випадки знайдених у розділі релаксаційних законів. Крім того, встановлено прості дробові рівняння, асимптотичними розв’язками яких є знайдені степеневі релаксаційні залежності.

4. На додаток проведено числові розрахунки, а саме: числове моделювання досліджуваного стохастичного процесу і числовий розв’язок відповідних інтегральних рівнянь, які дуже добре узгоджуються між собою і повністю підтверджують аналітично отримані результати.

Основні результати, які представлені у розділі, опубліковано в статтях [5, 6].

РОЗДІЛ 5

ТОЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДЛЯ РЕЛАКСАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У ДВОРІВНЕВИХ СИСТЕМАХ

В даному розділі ми знайдемо точні результати для релаксаційних процесів у дворівневих системах, що стосуються дебаївської релаксації, а також аномальних релаксацій Ерланга, Міттаг-Леффлера та Леві. До того ж ми отримаємо рівняння типу Монтролла-Вейсса для густини ймовірності різниці часів перебування системи в дозволених станах та знайдемо його точні розв'язки у випадку узагальненого телеграфного процесу. Зрозуміло, що такі розподіли тісно пов'язані з релаксаційними процесами, оскільки швидкість зміни середнього значення цієї різниці буде дорівнювати саме величині релаксаційної функції (див. підрозділ 5.5). А значить вони дають можливість більш глибше дослідити властивості релаксаційного процесу. Отримані точні результати цікаві тим, що дозволяють простежити поведінку дворівневої системи при малих значеннях часу, показують різноманітність релаксаційних режимів, і, крім того, їх можна використовувати для перевірки апроксимаційних схем.

5.1. Експоненціальна релаксація

Обговоримо можливість описання класичного випадку дебаївської релаксації, виходячи із запропонованої моделі релаксаційного процесу. У цьому разі густини ймовірності часу очікування є експоненціальними, тобто $p^\pm(\tau) = \bar{\tau}_\pm^{-1} e^{-t/\bar{\tau}_\pm}$, де параметр $\bar{\tau}_\pm$ дорівнює середньому часу перебування системи в верхньому/нижньому положеннях. Неважко перевірити, що за цих умов інтегральне рівняння (4.17) зводиться до диференціального

$$\frac{d}{dt}\mu(t) + \left(\frac{1}{\bar{\tau}_+} + \frac{1}{\bar{\tau}_-} \right) \mu(t) + \left(\frac{1}{\bar{\tau}_+} - \frac{1}{\bar{\tau}_-} \right) = 0 \quad (5.1)$$

із початковою умовою $\mu(0) = 1$. Як ми бачимо, система не проявляє ефектів пам'яті, що і потрібно для класичній ситуації. Розв'язок останнього рівняння

має простий чисто експоненціальний вигляд

$$\mu(t) = (1 - \mu_\infty)e^{-t/T} + \mu_\infty, \quad (5.2)$$

де $\mu_\infty = (\bar{\tau}_+ - \bar{\tau}_-) / (\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-)$, $T = \bar{\tau}_+ \bar{\tau}_- / (\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-)$. Зауважимо, що значення часів релаксації T в цьому розділі може відрізнятися від значень цієї величини в попередньому розділі. Приклади поведінки дебаєвської релаксації при різних середніх часах очікування системи в верхньому та нижньому положеннях показано на рисунку 5.1.

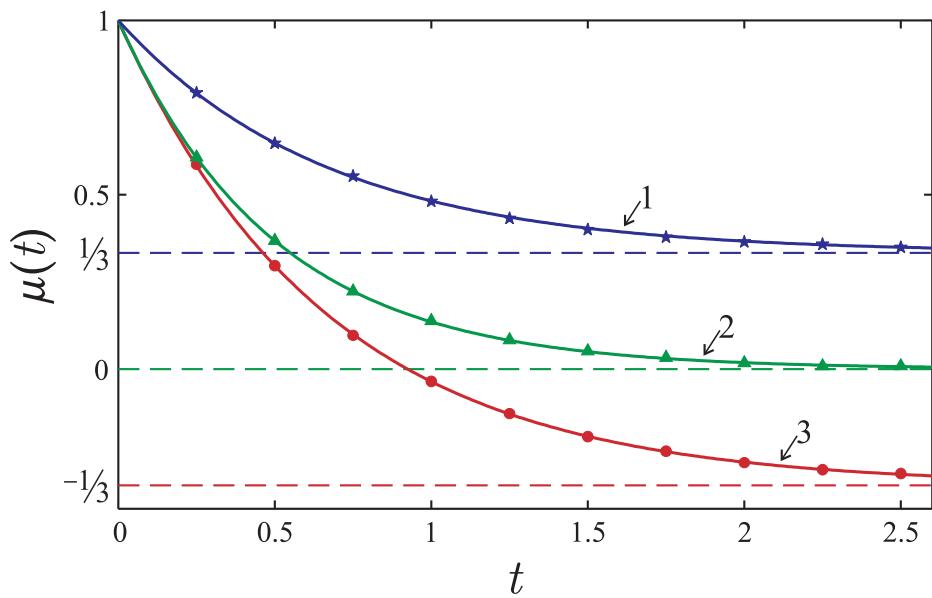


Рис. 5.1. Релаксаційні закони у випадку експоненціальних розподілів часів очікування при (1) $\bar{\tau}_+ = 2, \bar{\tau}_- = 1$; (2) $\bar{\tau}_+ = \bar{\tau}_- = 1$ та (3) $\bar{\tau}_+ = 1, \bar{\tau}_- = 2$. Суцільні лінії відповідають аналітичним розрахункам (5.2), а символи показують результати числового моделювання.

Виходячи із інших міркувань та при певних припущеннях про поведінку релаксаційного процесу, дана формула, наприклад, отримана в роботах [328–332], де вивчається релаксація магнітного моменту в системах одноосних наночастинок в обертовому магнітному полі. В даних роботах середні часи $\bar{\tau}_\pm$ – це функції параметрів досліджуваної системи, що були знайдені за допомогою відповідного рівняння Фоккера-Планка. Проте із рівнянь (4.16)–(4.19) видно, що для різних густин ймовірності $p^\pm(\tau)$ з однаковим середнім значением (при умові, що воно скінченне) закони релаксації можуть суттєво відрізнятися. Таким

чином, існування середнього часу перебування системи в верхньому і нижньому положеннях ще не гарантує, що закон релаксації буде експоненціальним. Тобто при знаходженні закона релаксації для конкретної фізичної системи ми повинні враховувати додаткову інформацію про характер її поведінки. Тим не менш, граничне значення $\mu(t)$ залежить тільки від середніх значень $\bar{\tau}_{\pm}$ і рівне $\mu(\infty) = (\bar{\tau}_+ - \bar{\tau}_-) / (\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-)$ (див. розділ 4).

5.2. Релаксація Ерланга

Нехай дворівнева система характеризується гамма-розподілами часів очікування в дозволених станах [361]

$$p^{\pm}(\tau) = \Theta_{\pm} \tau^{\kappa_{\pm}-1} e^{-\lambda_{\pm}\tau}, \quad (5.3)$$

де $\Theta_{\pm} = \lambda_{\pm}^{\kappa_{\pm}} / \Gamma(\kappa_{\pm})$, κ_{\pm} – додатні параметри, які визначають форму розподілів, і λ_{\pm} – додатні масштабні параметри, що пов’язані з інтенсивностями переходів системи між станами (середній час перебування процесу в положеннях ± 1 : $\bar{\tau}_{\pm} = \kappa_{\pm} / \lambda_{\pm}$).

Найбільш відомим частковим прикладом гамма-розподілу є фундаментальний розподіл Максвелла-Больцмана кінетичної енергії ідеального газу: $g(E) = \frac{1}{\Gamma(D/2)(k_B T)^{D/2}} E^{D/2-1} \exp(-E/k_B T)$, де T – абсолютна температура, k_B – стала Больцмана і D – розмірність простору. Крім того, гамма-розподіли виникають при дослідженні процесу ущільнення зернистих матеріалів [362], економічного трейдингу [363, 364], випадковому русі з переключенням швидкостей [365], інтерпретації параметра неекстенсивності у статистиці Цалліса [366].

Якщо у формулі (5.3) параметр κ_{\pm} є цілим додатнім числом, то ці густини називають розподілами Ерланга. Розподіл Ерланга тісно пов’язаний з експоненціальним і показує час очікування між n послідовними подіями для пуссонівського процесу. Таким чином, якщо ми маємо n незалежних випадкових величин, кожна із яких має одинаковий експоненціальний розподіл із параметром інтенсивності λ , то їх сума буде мати розподіл Ерланга з масштабним

параметром рівним λ та параметром форми рівним n . Неважко побачити, що рівняння (5.3) при $\kappa_{\pm} = 1$ задає експоненціальні розподіли часів очікування.

Для ілюстрації різноманітності поведінки законів релаксації ми знайдемо релаксаційні закони для несиметричного випадку розподілів Ерланга з $\lambda_+ \neq \lambda_-$ і $\kappa_{\pm} = \kappa = 2$, та для симетричної ситуації з $\lambda_{\pm} = \lambda$ і $\kappa_{\pm} = \kappa \geq 2$. Методи знаходження релаксаційних законів для загального випадку $\kappa_+ \neq \kappa_-$ будуть схожими, але результати можуть значно ускладнюватися (наприклад, містити нескінчений ряд осцилюючих функцій). Виходячи з цього, ми зосередимо увагу лише на двох зазначених прикладах.

Несиметрична релаксація

Розглянемо точний розв'язок для несиметричної релаксації при $\kappa = 2$. Із виразу (5.3) отримуємо $p_s^{\pm} = \lambda_{\pm}^2 / (s + \lambda_{\pm})^2$, а тому із (4.16) слідує

$$\mu_s = \frac{s^3 + 4as^2 + 4(\nu^2 + ab)s + 4\nu^2 b}{s(s + s_+)(s + s_-)(s + 2a)}, \quad (5.4)$$

де ми ввели $a = (\lambda_+ + \lambda_-)/2$, $b = (\lambda_- - \lambda_+)/2$, $\nu = \sqrt{\lambda_+\lambda_-}$ і $s_{\pm} = a \pm \sqrt{a^2 - 2\nu^2}$.

Застосовуючи обернене перетворення Лапласа до виразу (5.4) (див. [306]), для даного класу дворівневих систем отримуємо

$$\begin{aligned} \mu(t) = & \frac{\lambda_- - \lambda_+}{\lambda_+ + \lambda_-} \left(1 + \frac{\lambda_+}{\lambda_-} e^{-(\lambda_+ + \lambda_-)t} \right) + \frac{\lambda_+}{\lambda_-} \left[\cosh(\sqrt{a^2 - 2\nu^2} t) \right. \\ & \left. - (\lambda_+ - 3\lambda_-) \frac{\sinh(\sqrt{a^2 - 2\nu^2} t)}{2\sqrt{a^2 - 2\nu^2}} \right] e^{-(\lambda_+ + \lambda_-)t/2}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Хоча релаксаційні функції (5.2) і (5.5) мають однакові граничні значення $\mu(\infty) = (\lambda_- - \lambda_+)/(\lambda_+ + \lambda_-)$, їх поведінка при скінченних значеннях часу істотно відрізняється. Зокрема, при малих значеннях часу функція $1 - \mu(t)$ пропорційна t і t^2 відповідно. Більш того, на відміну від (5.2), релаксаційна функція (5.5) при $a^2 - 2\nu^2 > 0$ характеризується трьома часами релаксації, найбільший із яких рівний $1/s_-$.

Найцікавіша якісна відмінність між релаксаційними законами (5.2) і (5.5)

проявляється за умови $a^2 - 2\nu^2 < 0$, тобто коли параметри λ_{\pm} задовольняють нерівність

$$3 - 2\sqrt{2} < \frac{\lambda_+}{\lambda_-} < 3 + 2\sqrt{2}. \quad (5.6)$$

Так як в цьому разі $\sqrt{a^2 - 2\nu^2} = i\sqrt{2\nu^2 - a^2}$ із $2\nu^2 - a^2 > 0$, гіперболічні функції в рівнянні (5.5) повинні бути замінені на тригонометричні. Таким чином, вводячи період коливань цих функцій $T = 2\pi/\sqrt{2\nu^2 - a^2}$ або

$$T = \frac{4\pi}{\sqrt{6\lambda_+\lambda_- - \lambda_+^2 - \lambda_-^2}}, \quad (5.7)$$

вираз (5.5) переписується у формі

$$\begin{aligned} \mu(t) = & \frac{\lambda_- - \lambda_+}{\lambda_+ + \lambda_-} \left(1 + \frac{\lambda_+}{\lambda_-} e^{-(\lambda_+ + \lambda_-)t} \right) + \frac{\lambda_+}{\lambda_-} \left[\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right. \\ & \left. - (\lambda_+ - 3\lambda_-) \frac{T}{4\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right] e^{-(\lambda_+ + \lambda_-)t/2}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Згідно з цією формулою, якщо має місце умова (5.6), то функція $\mu(t)$ прямує до відповідного граничного значення $\mu(\infty)$ осцилюючим чином. Це цікавий і доволі неочікуваний факт, оскільки густини ймовірності часів очікування не мають осцилюючих періодичних членів. Отримана із рівняння (5.8) немонотона залежність $\mu(t)$ від t показана на рис. 5.2 для різних значень параметрів інтенсивності переходів λ_{\pm} . Зауважимо, що якщо для несиметричної ситуації взяти параметр $k > 2$, то у осцилюючому режимі немонотонність $\mu(t)$ буде мати ще складнішу форму.

Симетрична релаксація

При $\kappa_{\pm} = \kappa$ і $\lambda_{\pm} = \lambda$ маємо $p_s = \lambda^{\kappa}/(s + \lambda)^{\kappa}$ і, враховуючи рівняння (4.18), знаходимо

$$\mu_s = \frac{1 - (s + \lambda)^{\kappa}/\lambda^{\kappa}}{[1 - (s + \lambda)/\lambda][1 + (s + \lambda)^{\kappa}/\lambda^{\kappa}]} \quad (5.9)$$

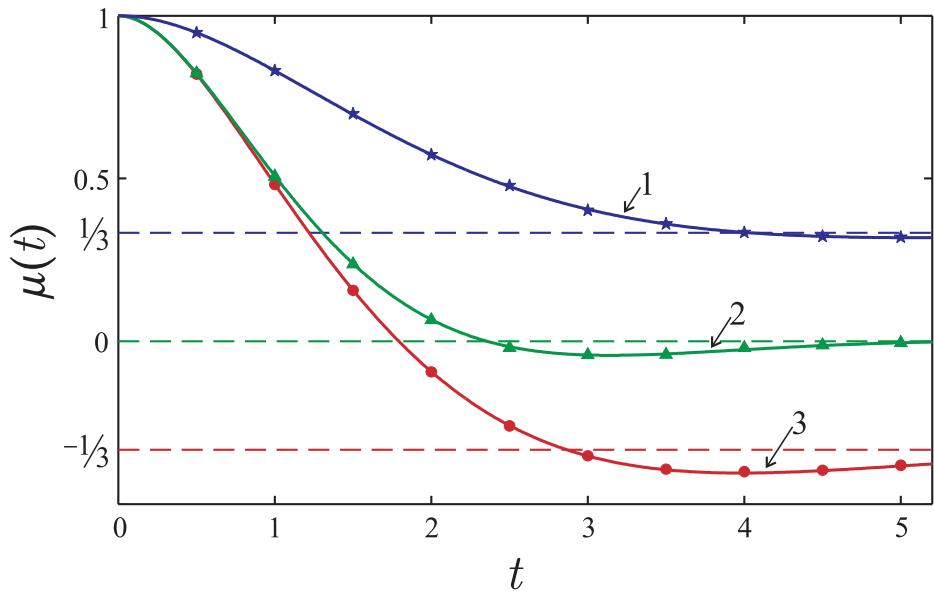


Рис. 5.2. Релаксаційні функції у випадку часів очікування з розподілами Ерланга з параметром $\kappa = 2$, а також (1) $\lambda_+ = 0.5$, $\lambda_- = 1$; (2) $\lambda_+ = \lambda_- = 1$ і (3) $\lambda_+ = 1$, $\lambda_- = 0.5$. Суцільні лінії відповідають теоретичному результату (5.8), а символи показують результати моделювання.Періоди T тригонометричних функцій в рівняннях (5.8) дорівнюють $8\pi/\sqrt{7}$, 2π і $8\pi/\sqrt{7}$ для випадків (1), (2) і (3) відповідно.

Останній результат показує, що $\mu(t) = e^{-\lambda t} g(\lambda t)$, де функція $g(t)$ задається за допомогою її перетворення Лапласа

$$g_s = \frac{1 - s^\kappa}{(1 - s)(1 + s^\kappa)}. \quad (5.10)$$

Використовуючи співвідношення $(1 - s^\kappa)/(1 - s) = \sum_{j=1}^{\kappa} s^{j-1}$ і $1 + s^\kappa = \prod_{j=1}^{\kappa} (s - a_j)$, де $a_j = e^{i\pi(2j-1)/\kappa}$ – розв’язок рівняння $1 + s^\kappa = 0$, ми можемо переписати формулу (5.10) в вигляді

$$g_s = \frac{\sum_{j=1}^{\kappa} s^{j-1}}{\prod_{j=1}^{\kappa} (s - a_j)}. \quad (5.11)$$

Далі, застосувавши обернене перетворення Лапласа до рівняння (5.11) (див. знову [306]), отримуємо

$$g(t) = \sum_{l=1}^{\kappa} \frac{\sum_{j=1}^{\kappa} a_l^{j-1}}{\prod_{j=1}^{\kappa} (a_l - a_j)} e^{a_l t}, \quad (5.12)$$

штрих в добутку показує, що $j \neq l$. Цей результат, разом з тим фактом, що $\sum_{j=1}^{\kappa} a_l^{j-1} = 2/(1 - a_l)$, приводить до формули

$$\mu(t) = 2 \sum_{l=1}^{\kappa} \frac{e^{-(1-a_l)\lambda t}}{(1-a_l) \prod_{j=1}^{\kappa} (a_l - a_j)}. \quad (5.13)$$

I, нарешті, оскільки $\prod_{j=1}^{\kappa} (a_l - a_j) = \kappa a_l^{\kappa-1} = -\kappa/a_l$, то релаксаційна функція (5.13) може бути представлена як

$$\mu(t) = \frac{\theta_{\kappa}}{\kappa} e^{-2\lambda t} + \frac{2}{\kappa} \sum_{l=1}^{[\kappa/2]} \left[\cos(\beta_l \lambda t) + \frac{\beta_l}{1-\alpha_l} \sin(\beta_l \lambda t) \right] e^{-(1-\alpha_l)\lambda t}. \quad (5.14)$$

Тут $\theta_{\kappa} = 0$ або 1 , якщо κ – парне чи непарне число відповідно, $[\kappa/2]$ – ціла частина $\kappa/2$, а також

$$\alpha_l = \cos\left(\frac{2\pi l - \pi}{\kappa}\right), \quad \beta_l = \sin\left(\frac{2\pi l - \pi}{\kappa}\right). \quad (5.15)$$

Отже, у відповідності з рівнянням (5.14) релаксація до граничного стану $\mu(\infty) = 0$ також відбувається осцилюючим чином. Проте, на відміну від релаксаційної функції (5.8), яка осцилює з одним періодом T , в даній ситуації осцилююча частина $\mu(t)$ у загальному випадку характеризується декількома періодами коливань $T_l = 2\pi/(\beta_l \lambda)$ (якщо $\kappa \geq 5$).

Відмітимо, що осцилюючий релаксаційний закон (5.14) з $\kappa = 2$ спостерігається для стохастичних систем, що описуються узагальненим рівнянням Ланжевена, яке враховує ефекти пам'яті (завдяки введенню інтегрального ядра) [367, 368]. Ці результати є наслідком немарківської дифузії та знаходять своє застосування, наприклад, при аналізі феномену температурної релаксації систем, що перебувають у контакті з тепловими резервуарами [369].

5.3. Релаксація Міттаг-Леффлера

В теорії релаксаційних процесів важливу роль також грає релаксація Міттаг-Леффлера. Це пов'язано з тим, що функція Міттаг-Леффлера [311, 313, 314] в певній мірі є аналогом експоненціальній функції в дробній динаміці, оскільки є розв'язком найпростіших дробних рівнянь [319]. Крім того, ці функції є інтерполюючими між функціями експоненціального типу та степеневими, а тому така релаксація може характеризувати переходи між різними режимами релаксації. Зокрема, це спостерігається при переході від закону Кольрауша-Ульямса-Уоттса при малих значеннях часу до степеневої поведінки при великих значеннях часу.

Аналогічно підрозділу 4.2.3 для більш простого симетричного випадку розподіл Міттаг-Леффлера визначається як

$$p(\tau) = -\frac{d}{d\tau} E_\alpha \left(-\frac{\tau^\alpha}{2T^\alpha} \right) = \frac{\tau^{\alpha-1}}{2T^\alpha} E_{\alpha,\alpha} \left(-\frac{\tau^\alpha}{2T^\alpha} \right). \quad (5.16)$$

Тут $E_\alpha(\cdot)$ – однопараметрична функція Міттаг-Леффлера, $E_{\alpha,\alpha}(\cdot)$ – узагальнена двопараметрична функція Міттаг-Леффлера, параметр $\alpha \in (0, 1]$, а величина $T > 0$ визначає час релаксації. Тоді перетворення Лапласа для (5.16) дається формулою

$$p_s = \frac{1}{1 + 2T^\alpha s^\alpha}. \quad (5.17)$$

Підставлячи цей вираз формулу в рівняння (4.18), отримуємо

$$\mu_s = T \frac{(Ts)^{\alpha-1}}{1 + (Ts)^\alpha}, \quad (5.18)$$

а звідси знаходимо закон релаксації

$$\mu(t) = E_\alpha[-(t/T)^\alpha]. \quad (5.19)$$

Більш детально важливість розподілів Міттаг-Леффлера обговорена в

підрозділі 4.2.3. Крім того, відмітимо зв'язок густини ймовірності Міттаг-Леффлера з іншими фундаментальними розподілами випадкових величин. Нехай X – експоненціально розподілена випадкова величина, а Y – α -стійка випадкова величина, тоді випадкова величина $Z = X^{1/\alpha}Y$ буде мати розподіл Міттаг-Леффлера. Водночас зауважимо, що випадкова величина $X^{1/\alpha}$ має відомий розподіл Вейбулла. Цей факт слідує із властивостей перетворень Лапласа зазначених розподілів, а саме

$$\langle e^{-Zs} \rangle_Z = \langle \langle e^{-(X^{1/\alpha}s)Y} \rangle_Y \rangle_X = \langle e^{-Xs^\alpha} \rangle_X = \frac{1}{1+s^\alpha}. \quad (5.20)$$

Тут $\langle \cdot \rangle_Q$ – усереднення процесу відносно розподілу деякої величини Q .

Розглянемо тепер несиметричну релаксацію Міттаг-Леффлера. Для простоти, не втрачаючи загальності, ми покладемо в формулі (5.16) $2T^\alpha = 1$, тоді густини $p^\pm(\tau)$ задаються формулами

$$p^\pm(\tau) = -\frac{d}{d\tau} E_{\alpha_\pm}(-\tau^{\alpha_\pm}) = \tau^{\alpha_\pm-1} E_{\alpha_\pm, \alpha_\pm}(-\tau^{\alpha_\pm}), \quad (5.21)$$

де $\alpha_\pm \in (0, 1]$ і їх перетворення Лапласа

$$p_s^\pm = \frac{1}{1+s^{\alpha_\pm}}. \quad (5.22)$$

Таким чином, із рівняння (4.16) маємо

$$\mu_s = \frac{s^\alpha - s^\beta + s^{\alpha+\beta}}{s(s^\alpha + s^\beta + s^{\alpha+\beta})}, \quad (5.23)$$

де введено позначення $\alpha_+ = \alpha$ і $\alpha_- = \beta$. Цей вираз не є перетворенням Лапласа для стандартних спеціальних функцій, а тому релаксаційну функцію $\mu(t)$ знайдемо за допомогою комплексного інтегрування. Запишемо формулу (5.23) в наступному вигляді

$$\mu_s = \frac{1}{s} - 2 \frac{s^{\beta-\alpha-1}}{s^{\beta-\alpha} + s^\beta + 1}. \quad (5.24)$$

Дане представлення зручне для отримання оберненого перетворення Лапласа від μ_s у випадку $\alpha < \beta$. А якщо $\beta < \alpha$, то вираз (5.23) необхідно записати у такій формі (див. пояснення далі)

$$\mu_s = -\frac{1}{s} + 2 \frac{s^{\alpha-\beta-1} + s^{\alpha-1}}{s^{\alpha-\beta} + s^\alpha + 1}. \quad (5.25)$$

У додатку В знайдено, що за умови $\alpha < \beta$ із рівняння (5.24) слідує закон релаксації

$$\mu(t) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx e^{-xt} \times \frac{\sin[\pi(\beta - \alpha)]x^{\beta-\alpha-1} - \sin(\pi\alpha)x^{2\beta-\alpha-1}}{1 + 2\cos(\pi\alpha)x^{2\beta-\alpha} + 2\cos[\pi(\beta - \alpha)]x^{\beta-\alpha} + 2\cos(\pi\beta)x^\beta + x^{2(\beta-\alpha)} + x^{2\beta}}. \quad (5.26)$$

Якщо ж має місце умова $\beta < \alpha$, то із рівняння (5.25) отримуємо

$$\mu(t) = -1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx e^{-xt} \times \frac{\sin[\pi(\alpha - \beta)]x^{\alpha-\beta-1} + \sin(\pi\alpha)x^{\alpha-1}}{1 + 2\cos(\pi\alpha)x^\alpha + 2\cos[\pi(\alpha - \beta)]x^{\alpha-\beta} + 2\cos(\pi\beta)x^{2\alpha-\beta} + x^{2(\alpha-\beta)} + x^{2\alpha}}. \quad (5.27)$$

Дані формули особливо зручні для розрахунку закону релаксації при великих значеннях часу, а також на основі леми Ватсона [315] із них можна знайти асимптотичний розклад $\mu(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Відмітимо, що при знаходженні формул (5.26) і (5.27) ми виділили члени 1 та -1 , оскільки для цих випадків $\mu(\infty) = 1$ та $\mu(\infty) = -1$ відповідно. Також зазначимо, що інтеграли в цих рівняннях не є однаковими (з точністю до перестановки параметрів α і β), оскільки процес завжди починається з позиції $f(t) = 1$, тобто перший час очікування характеризується хвостовим параметром α . Отримаємо тепер ще одне представлення $\mu(t)$, яке, на відміну від формул (5.26) і (5.27), не містить інтегралів, а виражається через узагаль-

нені функції Мітtag-Леффлера. Крім того, це представлення буде зручним для розрахунків при малих значеннях t . А оскільки $\mu(0) = 1$, то в обох випадках ($\alpha < \beta$ і $\alpha > \beta$) будемо виходити із виразу (5.24).

Для $\alpha < \beta$ запишемо μ_s в вигляді наступного ряду

$$\mu_s = \frac{1}{s} - 2 \frac{s^{\beta-\alpha-1}}{s^{\beta-\alpha} + s^\beta + 1} = \frac{1}{s} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{s^{-\alpha n-1}}{(1+s^{-\beta})^n}, \quad (5.28)$$

який збіжний при

$$\left| \frac{s^{\beta-\alpha}}{1+s^\beta} \right| < 1. \quad (5.29)$$

Використовуючи показникову форму для змінної s неважко переконатися, що при $\alpha < \beta$ дана нерівність завжди виконується для області $\operatorname{Re} s > 0$. Відомо, що має місце співвідношення [311, 313, 314]

$$\mathcal{L}^{-1}\{s^{-b}(1+s^{-a})^{-c}\} = t^{b-1} E_{a,b}^c(-t^a), \quad (5.30)$$

де $E_{a,b}^c(\cdot)$ – трьохпараметрична функція Мітtag-Леффлера, $\operatorname{Re}\{a, b, c\} > 0$; а також $\operatorname{Re} s > 0$ та $|s| > 1$. Цю формулу можна отримати розкладши в рівнянні (5.30) вираз $(1+s^{-a})^{-c}$ по степеням s^{-a} . Звідси знаходимо закон релаксації у вигляді ряду

$$\mu(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-t^\alpha)^n E_{\beta, \alpha n+1}^n(-t^\beta). \quad (5.31)$$

А ось для випадку $\alpha > \beta$ перепишемо вираз (5.24) у вигляді ряду

$$\mu_s = \frac{1}{s} - 2 \frac{s^{-1}}{s^{\alpha-\beta} + s^\alpha + 1} = \frac{1}{s} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{s^{-\beta n-(\alpha-\beta)-1}}{(1+s^{-\alpha})^n}, \quad (5.32)$$

який збіжний при

$$\left| \frac{s^{\alpha-\beta}}{1+s^\alpha} \right| < 1. \quad (5.33)$$

Аналогічно неважко побачити, що остання нерівність справедлива для області $\operatorname{Re} s > 0$ при всіх значеннях $\alpha > \beta$. Таким чином, використовуючи формулу (5.30), за умов $\operatorname{Re} s > 0$ та $|s| > 1$ отримуємо

$$\mu(t) = 1 + 2t^{\alpha-\beta} \sum_{n=1}^{\infty} (-t^\beta)^n E_{\alpha, \beta n + (\alpha - \beta) + 1}^n(-t^\alpha). \quad (5.34)$$

На рисунку 5.3 приведено типову поведінку несиметричних законів релаксації Мітtag-Леффлера. Крім того, звернемо увагу, що в додатку Г показано, що ряди (5.31) та (5.34) будуть дуже швидко збіжними. Таким чином, вони є зручними для практичних розрахунків числової залежності закону релаксації від часу, особливо при використанні сучасних комп’ютерних систем для технічних розрахунків (наприклад, MATLAB або Wolfram Mathematica).

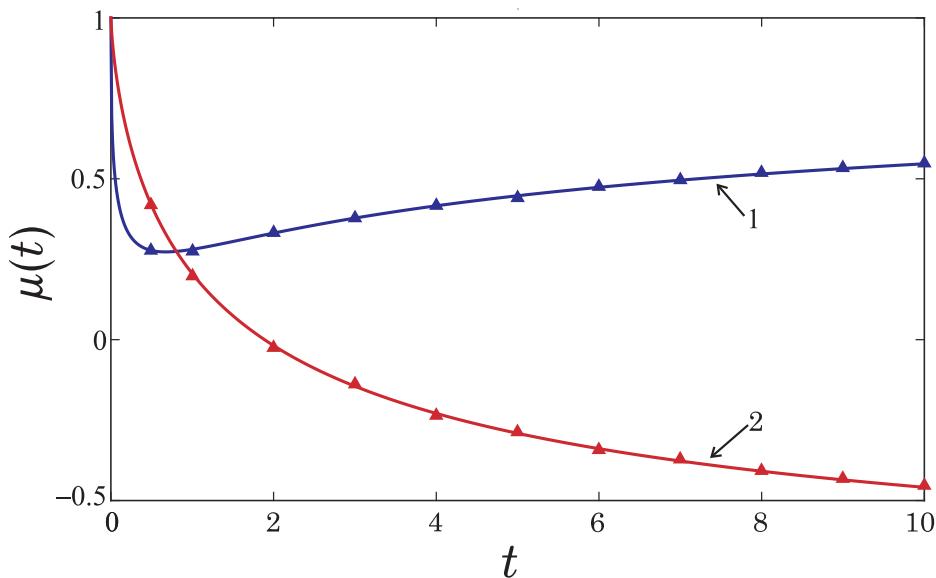


Рис. 5.3. Релаксаційні функції у випадку часів очікування з розподілами Мітtag-Леффлера. Суцільні лінії відповідають теоретичним формулам (5.31) і (5.34), а символи – результатам моделювання. Розрахунки проводилися для випадків (1) $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.8$ і (2) $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.4$; генерація випадкових величин із розподілом Мітtag-Леффлера базувалася на методі з роботи [370] (див. також [371]).

5.4. Релаксація Леві

Розглянемо тепер ще один важливий випадок, для якого можна точно вирахувати закон релаксації. Задамо густини ймовірності $p^\pm(\tau)$ у вигляді одностороннього розподілу Леві. В симетричному випадку він дається формулою [372–374]

$$p(\tau) = l_\alpha(\tau) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-s^\alpha}\}, \quad (5.35)$$

де параметр $\alpha \in (0, 1)$. Підставлячи цю формулу в рівняння (4.18) отримуємо

$$\mu_s = \frac{1 - e^{-s^\alpha}}{s(1 + e^{-s^\alpha})}. \quad (5.36)$$

Використовуючи такий же метод, як і у випадку релаксації Міттаг-Леффлера (див. додаток Б), після інтегрування рівності (5.36) знаходимо

$$\mu(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{e^{-xt}}{x} \frac{e^{-\cos(\pi\alpha)x^\alpha} \sin[\sin(\pi\alpha)x^\alpha]}{1 + 2e^{-\cos(\pi\alpha)x^\alpha} \cos[\sin(\pi\alpha)x^\alpha] + e^{-2\cos(\pi\alpha)x^\alpha}} \quad (5.37)$$

Як вже зазначалося, формули типу перетворення Лапласа зручні для розрахунку $\mu(t)$ при великих значеннях змінної. Обчислимо тепер вираз для $\mu(t)$ у вигляді ряду, що (як і для релаксації Міттаг-Леффлера) буде характеризуватися швидкою збіжністю (див. додаток Г). Представимо вираз (5.36) як ряд

$$\mu_s = \frac{1}{s} + \frac{2}{s} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-(n^{1/\alpha}s)^\alpha}, \quad (5.38)$$

а потім застосуємо до нього обернене перетворення Лапласа. Прийнявши до уваги формулу $l_\alpha(\tau) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-s^\alpha}\}$, отримаємо ряд

$$\mu(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\frac{t}{n^{1/\alpha}}} d\tau l_\alpha(\tau). \quad (5.39)$$

Далі, ввівши для густини $l_\alpha(\tau)$ функцію розподілу

$$\Phi_\alpha(t) = \int_0^t d\tau l_\alpha(\tau), \quad (5.40)$$

записуємо наступний ряд для закону релаксації

$$\mu(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Phi_\alpha \left(n^{-1/\alpha} t \right). \quad (5.41)$$

На рисунку 5.4 приведено порівняння поведінки симетричних законів релаксації Міттаг-Леффлера та Леві при однаковому значенні хвостового параметру розподілу часів очікування.

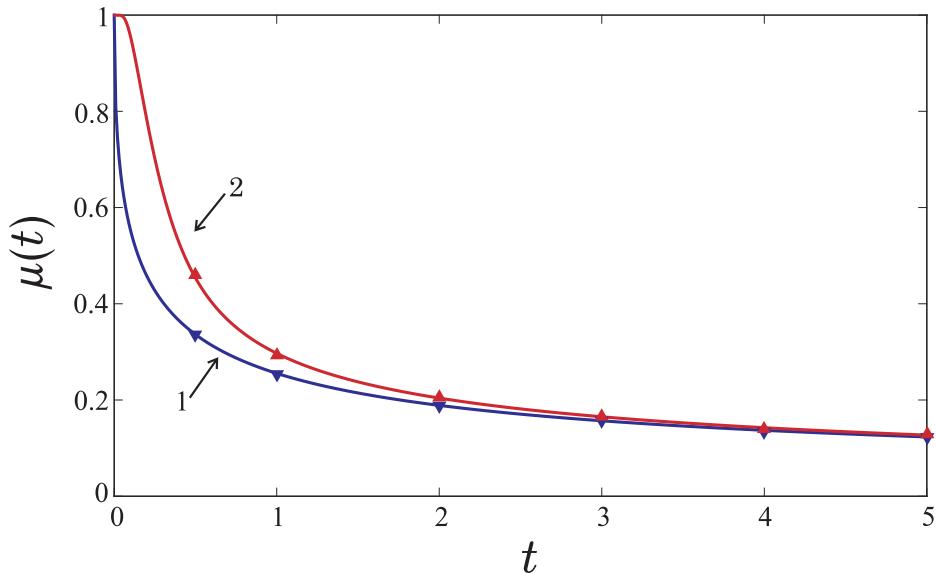


Рис. 5.4. Закони симетричної релаксації Міттаг-Леффлера (5.19) (лінія 1) з параметрами $\alpha = 1/2$ і $T = 1/4$, та релаксації Леві (5.41) (лінія 2) з $\alpha = 1/2$. Суцільні лінії відповідають теоретичним розрахункам, а трикутники – числовому моделюванню. Для генерації випадкових величин із розподілом Міттаг-Леффлера використовувався метод [370], а для генерації розподілів Леві – метод [375]. Із асимптотичного аналізу слідує, що в обох ситуаціях при великих значеннях часу релаксаційні функції прямують до залежності $1/(2\sqrt{\pi t})$.

Випадок несиметричної релаксації Леві ($p^\pm(\tau) = l_{\alpha\pm}(\tau)$, де $\alpha_\pm \in (0, 1)$) ми детально розглядати не будемо, оскільки наявні там формулі є доволі громіздкими. Зазначимо при цьому, що метод їх отримання є аналогічним до описаних вище випадків. Наприклад, із формулі (4.16) у просторі Лапласа можна

отримати $\mu_s = 1/s - (2/s)e^{-s^\alpha} + (2/s) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ns^\alpha} e^{-ns^\beta} (1 - e^{-s^\alpha})$, а тому представлення закону релаксації записується у формі ряду

$$\mu(t) = 1 - 2\Phi_\alpha(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/\beta}} \int_0^t d\tau l_\beta\left(\frac{\tau - \tau'}{n^{1/\beta}}\right) \left[\Phi_\alpha\left(\frac{\tau'}{n^{1/\alpha}}\right) - \Phi_\alpha\left(\frac{\tau'}{(n+1)^{1/\alpha}}\right) \right], \quad (5.42)$$

де, як і для релаксації Мітtag-Леффлера, ми ввели $\alpha_+ = \alpha$ і $\alpha_- = \beta$.

5.5. Густини ймовірності для різниці часів перебування дворівневої системи в дозволених станах

Обговоримо тепер іншу важливу характеристику для досліджуваного процесу, а саме густину ймовірності різниці часу перебування процесу $f(t)$ в “верхньому” та ”нижньому” положеннях. Позначимо цю випадкову величину Δ_t . А оскільки $\Delta_t = t_+ - t_+ = 2t_+ - t = t - 2t_-$ (де t_\pm – час перебування в стані ± 1), то проста заміна змінних дозволяє відразу отримувати і розподіли не тільки різниці, а безпосередньо часу перебування процесу в кожному із двох можливих станів. Очевидно, що випадкова величина Δ_t пов’язана із процесом $f(t)$ наступним виразом

$$\Delta_t = \int_0^t dt' f(t') \quad (5.43)$$

При цьому середнє значення функції $f(t)$ на інтервалі $(0, t]$ (часове середнє)

$$y_t = \frac{1}{t} \int_0^t dt' f(t') = \frac{\Delta_t}{t} \quad (5.44)$$

може бути інтерпретовано як середня намагніченість в системі [131].

Густина ймовірності $P(\Delta, t)$ того, що різниця часу очікування перебування процесу в верхньому та нижньому положеннях Δ_t дорівнює Δ для фіксованого

часу t може бути записана у вигляді

$$P(\Delta, t) = \langle \delta(\Delta_t - \Delta) \rangle, \quad (5.45)$$

де, як завжди, $\delta(\cdot)$ – дельта-функція і кутові дужки показують усереднення дихотомічного процесу $f(t)$ по всім реалізаціям. Відмітимо важливий зв'язок релаксаційної функції з випадковою величиною Δ_t . Виходячи із формулі (5.43), середнє значення Δ_t дається виразом $\langle \Delta_t \rangle = \int_0^t dt' \langle f(t') \rangle$. У той же час, згідно з означенням (4.1), релаксаційна функція задається як $\mu(t) = \langle f(t) \rangle$. Отже, можемо отримати рівність $\langle \Delta_t \rangle = \int_0^t dt' \mu(t')$, що після диференціювання приймає форму

$$\mu(t) = \frac{d}{dt} \langle \Delta_t \rangle. \quad (5.46)$$

А значить релаксаційна функція дорівнює швидкості зміни середнього значення різниці часів перебування системи в двох своїх положеннях. Однак обчислювати релаксаційну функцію із співвідношення $\mu(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \Delta P(\Delta, t)$ суттєво складніше. Це пов'язано із необхідністю знаходити спочатку відповідну густину $P(\Delta, t)$, а потім інтеграл від неї. Таким чином, ми отримували асимптотичні та точні релаксаційні закони, використовуючи безпосередньо рівняння для $\mu(t)$.

Метод отримання густини ймовірності $P(\Delta, t)$ є схожим на метод знаходження закону релаксації $\mu(t)$ в підрозділі 4.1.1, а тому ми винесемо його в додаток. Із додатку Д слідує, що у просторі Фур'є-Лапласа рівняння для $P_{ks} = \mathcal{F}\{\mathcal{L}\{P(\Delta, t)\}\}$ ($\Delta \xrightarrow{\mathcal{F}} k$, $t \xrightarrow{\mathcal{L}} s$) дається виразом

$$P_{ks} = \frac{1 - p_{s-ik}^+}{s - ik} + \tilde{P}_{ks}, \quad (5.47)$$

де

$$\tilde{P}_{ks} = \frac{p_{s-ik}^+}{1 - p_{s-ik}^+ p_{s+ik}^-} \left(\frac{1 - p_{s+ik}^-}{s + ik} + \frac{1 - p_{s-ik}^+}{s - ik} p_{s+ik}^- \right). \quad (5.48)$$

У рівнянні (5.47) перший член в правій частині є сингулярним і відповідає ситуації, коли жодного стрибка процесу $f(t)$ не відбулося. А другий член, що дается формулою (5.48), є регулярним і вносить домінуючий вклад у поведінку процесу при великих значеннях часу. Зауважимо, що оскільки $\Delta_t \in [-t, t]$, то $P(\Delta, t) = 0$ при $|\Delta| > t$.

Рівняння (5.47) за своєю структурою є рівнянням типу Монтролла-Вейсса. Однак його вигляд суттєво складніший, ніж для оригінального рівняння Монтролла-Вейсса для незв'язаних неперервних у часі випадкових блукань (див. розділ 1–2). Це пов'язано з тим, що величина Δ_t не є незалежною, а задається часом t , і даний процес відноситься до типу блукань Леві. У зв'язку із складною залежністю P_{ks} від змінних k і s , знаходження $P(\Delta, t)$ безпосередньо за допомогою оберненого перетворення Фур'є-Лапласа $P(\Delta, t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{P}_{ks}\}\}$ можливе лише у деяких часткових випадках. А ось асимптотичний аналіз можна провести методами, що аналогічні до використаних нами в розділах 2–3.

Відмітимо, що аналогічне до формулі (5.48) рівняння в частковому випадку з симетричними важкими густинами було отримано і асимптотично розв'язано при аналізі часу перебування стохастичного процесу в одному із станів для спінових систем в роботі [131]. В загальному ж випадку несиметричних густин ймовірності $p^\pm(\tau) \neq p^-(\tau)$ асимптотичні розв'язки для $P(\Delta, t)$ при $t \rightarrow \infty$ будуть доволі складними і характеризуватися дуже широким спектром можливих розподілів в залежності від поведінки хвостів $p^+(\tau)$. В даній роботі ми не ставимо за мету знаходження таких асимптотичних розв'язків, оскільки в першу чергу зосереджені на дослідженні законів релаксації. Приведемо для прикладу лише обчислення точного виразу для $P(\Delta, t)$ у важливому випадку, коли $f(t)$ – узагальнений телеграфний процес [102].

5.5.1. Узагальнений телеграфний процес

Якщо $f(t)$ – узагальнений телеграфний процес, то він характеризується експоненціальними густинами часів очікування між стрибками, тобто $p^\pm(\tau) = \lambda_\pm e^{-\lambda_\pm \tau}$. Тобто ми маємо справу з несиметричною дебаєвською релаксацією в дворівневих системах. Для цих густин $p_{s \mp ik}^\pm = \lambda_\pm / (\lambda_\pm + s \mp ik)$ і з рівнянь (5.47) та (5.48) отримуємо

$$P_{ks} = \frac{1}{s - ik + \lambda_+} + \tilde{P}_{ks}, \quad (5.49)$$

$$\tilde{P}_{ks} = \frac{\lambda_+(s - ik + 2a)}{(s - ik + \lambda_+)[(s + a)^2 - \eta^2(k)]} \quad (5.50)$$

із $\eta(k) = \sqrt{a^2 - k^2 - 2ibk}$, $a = (\lambda_+ + \lambda_-)/2$ і $b = (\lambda_+ - \lambda_-)/2$.

Далі для знаходження перетворення Фур'є (характеристичної функції) $P_k(t)$ густини $P(\Delta, t)$ ми візьмемо обернене перетворення Лапласа від обох частин (5.49). Нагадаємо, що воно дається формулою $\mathcal{L}^{-1}\{\psi_s\} = \psi(t) = (2\pi i)^{-1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds e^{st} \psi_s$, де дійсна частина числа s повинна перевищувати дійсні частини всіх сингулярностей ψ_s . Отже, використовуючи обернене перетворення Лапласа (див. таблицю інтегральних перетворень [306]) для $(s - ik + \lambda_+)^{-1}$, результат приймає вигляд

$$P_k(t) = e^{ikt - \lambda_+ t} + \tilde{P}_k(t), \quad (5.51)$$

де

$$\tilde{P}_k(t) = e^{-at} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + ik + a \right) F_k(t) - e^{ikt - bt} \right] \quad (5.52)$$

та

$$F_k(t) = \frac{\sinh[\eta(k)t]}{\eta(k)}. \quad (5.53)$$

Наступним кроком застосуємо до рівняння (5.51) обернене перетворення Фур'є, $\mathcal{F}^{-1}\{\varphi_k\} = \varphi(\Delta) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{i\infty} dk e^{-ik\Delta} \varphi_k$, та перепишемо формулу (Д.6) з урахуванням, що $W^{(0)}(t) = e^{-\lambda_+ t}$ та $\tilde{P}(\Delta, t) = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{P}_k(t)\}$. Відмітимо, що важливою характеристикою функції $\tilde{P}(\Delta, t)$, яка слідує з означення величини Δ_t [вираз (Д.5)], є той факт, що $\tilde{P}(\Delta, t) = 0$ при $|\Delta| > t$. Локалізованість $\tilde{P}(\Delta, t)$ випливає з того, що допоміжна функція $F(\Delta, t) = \mathcal{F}^{-1}\{F_k(t)\}$ визначена при $|\Delta| \neq t$ і $F(\Delta, t) = 0$, якщо $|\Delta| > t$ (в цьому можна буде переконатися далі). Тоді із виразу (5.52) і рівності $\mathcal{F}^{-1}\{e^{ikt}\}|_{\Delta \neq t} = \delta(\Delta - t)|_{\Delta \neq t} = 0$ слідує, що функція $\tilde{P}(\Delta, t)$ при $|\Delta| < t$ може бути виражена через $F(\Delta, t)$ як

$$\tilde{P}(\Delta, t) = e^{-at} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \Delta} + a \right) F(\Delta, t). \quad (5.54)$$

Представлення $\tilde{P}(\Delta, t)$ знаходиться за допомогою зміни порядку інтегрування та диференціювання. Для уникнення додаткової складності ми не будемо вдаватися в математичне обґрунтування цієї процедури. Зазначимо лише, що її можна провести використовуючи стандартні критерії стосовно диференціювання під знаком інтегралу (див., наприклад, [318]).

У додатку Е знайдено функції $F(\Delta, t)$ та $\tilde{P}(\Delta, t)$ для симетричного ($\lambda_+ = \lambda_-$) та несиметричного ($\lambda_+ \neq \lambda_-$) телеграфного процесу. Нижче приведено отримані результати для випадкової величини $y_t = \Delta/t$ (визначення (5.44)). При цьому у разу необхідності густину ймовірності для Δ отримуємо із співвідношення величини $\mathcal{P}_t(y) = \langle \delta(y_t - y) \rangle$ виражається через густину ймовірності $P(\Delta, t) = (1/t)\mathcal{P}_t(\Delta/t)$.

Симетричний випадок

У симетричному випадку параметри $\lambda_+ = \lambda_- = \lambda$ і густина ймовірності

для процесу y_t дається формулою

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_t(y) = & e^{-\lambda t} \delta(y - 1) + \frac{\lambda t}{2} e^{-\lambda t} \left[I_0(\lambda \sqrt{1 - y^2} t) \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} I_1(\lambda \sqrt{1 - y^2} t) \right].\end{aligned}\quad (5.55)$$

Згідно з цим рівнянням $\mathcal{P}_t(y)$ в початковий момент записується як $\mathcal{P}_0(y) = \delta(y - 1)$. При збільшенні t вклад першого сингулярного члена в правій частині рівняння (5.55) зменшується, і основний вклад привносить другий регулярний член $\mathcal{P}_t(y)$. Залежність густини ймовірності $\mathcal{P}_t(y)$ від y для різних значень часу, знайдена із формулі (5.55) і показана на рис. 5.5. На ньому ж показано і результати числового моделювання, які знаходяться у дуже гарній відповідності із аналітичними.

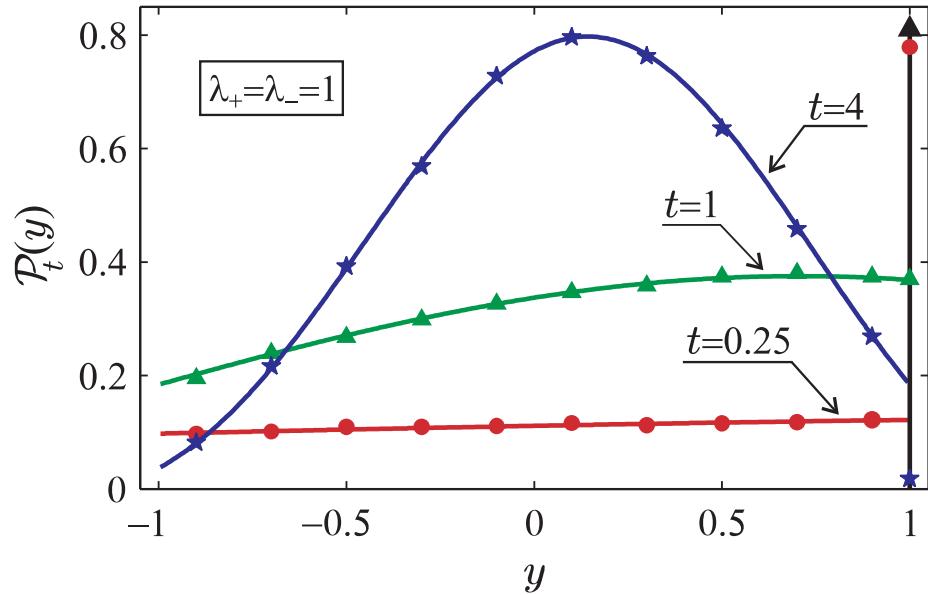


Рис. 5.5. Густина ймовірності $\mathcal{P}_t(y)$ як функція y для різних значень часу t та параметрів $\lambda_+ = \lambda_-$. Суцільні лінії показують аналітичні результати, отримані із формулі (5.55), а символи відповідають числовим розрахункам. Вертикальна стрілка в точці $y = 1$ позначає δ -функцію $\delta(y - 1)$, а символи на ній показують ймовірність $W^{(0)}(t) = e^{-\lambda_+ t}$, що процес y_t залишиться в початковому стану.

Звернемо увагу, що $I_\omega(x) \sim e^x / \sqrt{2\pi x}$ (ω – дійсне число) [315] при $x \rightarrow \infty$,

то вираз (5.55) при великих значеннях часу дає

$$\mathcal{P}_t(y) \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda t}{2\pi}} \frac{(1-y)^{1/2} + (1+y)^{1/2}}{(1-y)^{3/4}(1+y)^{1/4}} e^{-(1-\sqrt{1-y^2})\lambda t} \quad (5.56)$$

($|y| < 1$). Зазначимо також, що разом із зростанням t густину ймовірності $\mathcal{P}_t(y)$ концентрується все більше і більше в околі точки $y = 0$, і, як наслідок, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}_t(y) = \delta(y)$. З фізичної точки зору це означає, що з плином часу процес прямує до рівноважного стану.

Несиметричний випадок

Для несиметричного узагальненого телеграфного процесу $\lambda_+ \neq \lambda_- = \lambda$ і відповідна густину ймовірності масштабованої випадкової величини $y_t = y$ записується як

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_t(y) = & e^{-\lambda_+ t} \delta(y - 1) + \frac{\lambda_+ t}{2} e^{-at - byt} \left[I_0(\nu \sqrt{1-y^2} t) \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}} \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} I_1(\nu \sqrt{1-y^2} t) \right]. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Поведінка $\mathcal{P}_t(y)$ як функції y для різних значень t та $\lambda_+ \neq \lambda_-$ показана на рисунку 5.6. Як і у разі симетричного телеграфного процесу густину ймовірності (5.57) при $t \rightarrow \infty$ прямує до δ -функції, але цього разу вона зміщена відносно початку координат: $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}_t(y) = \delta(y + b/a)$. Результати цього підрозділу справедливі для довільних λ_+ та λ_- , і при $\lambda_+ = \lambda_-$ вони зводяться до результатів розрахунків для симетричного випадку.

Звернемо увагу, що дослідження поведінки густини ймовірності для узагальненого телеграфного процесу на основі інших методів було проведено в роботах [102, 203, 376]. Ми привели ці точні розрахунки у якості ілюстративного прикладу щодо можливостей представленого підходу CTRW для опису широкого спектру фізичних явищ і знаходження їх характеристик.

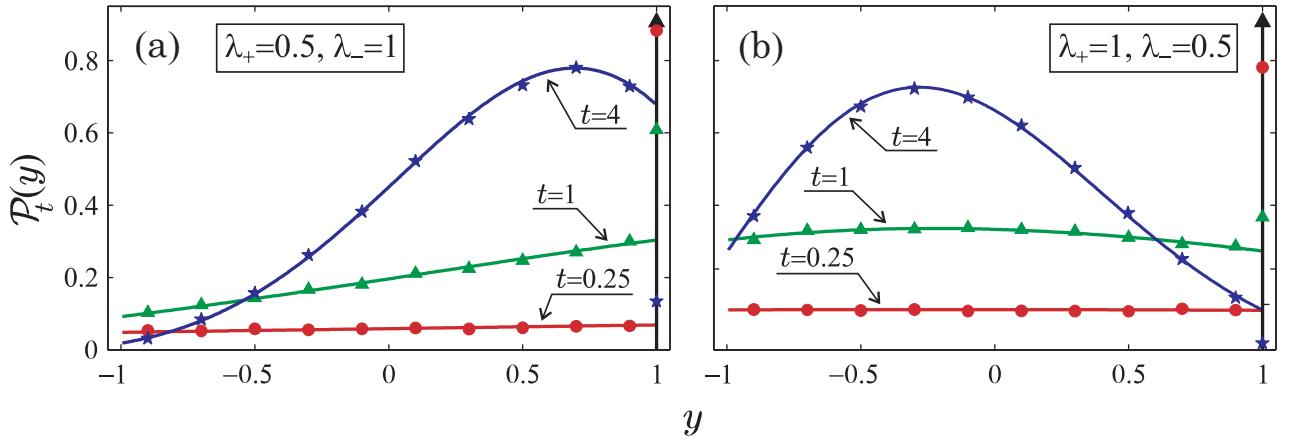


Рис. 5.6. Густина ймовірності $\mathcal{P}_t(y)$ як функція y для різних значень часу t та параметрів (a) $\lambda_+ < \lambda_-$ і (b) $\lambda_+ > \lambda_-$. Суцільні лінії показують аналітичні залежності, отримані із формулами (5.57), а символи відображають результати числового моделювання. В точці $y = 1$ вертикальна лінія відповідає δ -функції, а символи показують ймовірність $W^{(0)}(t) = e^{-\lambda_+ t}$ локалізації.

Насамкінець обговоримо ще одну важливу характеристику для різниці часів перебування в верхньому та нижньому положеннях, а саме моменти цієї величини, що даються формулою $\langle \Delta_t^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \Delta^n P(\Delta, t)$ ($n = \overline{1, \infty}$). Вони можуть бути підраховані із формули

$$\langle \Delta_t^n \rangle = t^n e^{-\lambda_+ t} + \int_{-t}^t d\Delta \Delta^n \tilde{P}(\Delta, t) \quad (5.58)$$

з $\tilde{P}(\Delta, t)$, що дається виразом (E.8). Тим не менш, із обчислювальної точки зору зручно використовувати диференціальне представлення моментів

$$\langle \Delta_t^n \rangle = (-i)^n \frac{d^n}{dk^n} P_k(t) \Big|_{k=0}. \quad (5.59)$$

Згідно з рівняннями (5.51)–(5.53) характеристична функція $P_k(t)$ випадкової величини Δ_t з експоненціальними густинами ймовірностей часів очікування дається формулою

$$P_k(t) = e^{-at} \left[(ik + a) \frac{\sinh[\eta(k)t]}{\eta(k)} + \cosh[\eta(k)t] \right]. \quad (5.60)$$

На основі співвідношень (5.59) і (5.60) підрахунки проводять до наступного

виразу для моменту першого порядку Δ_t

$$\langle \Delta_t \rangle = -\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_-} t + \frac{2\lambda_+}{(\lambda_+ + \lambda_-)^2} \left(1 - e^{-(\lambda_+ + \lambda_-)t}\right). \quad (5.61)$$

При великих значеннях часу із рівняння (5.61) слідує $\langle \Delta_t \rangle \sim 1/(2\lambda)$ та $\langle \Delta_t \rangle \sim -(b/a)t$ для симетричного та несиметричного телеграфного процесу відповідно. Зауважимо, що той факт, що у симетричному випадку $\langle \Delta_t \rangle \neq 0$ випливає з умови, що початковий стан $f(0) = 1$. Крім того, неважко переконатися, що (після відповідного перепозначення параметрів) функція $(d/dt)\langle \Delta_t \rangle$ буде дорівнювати $\mu(t)$ для дебаєвської релаксації (формула (5.2)), що узгоджується із співвідношенням (5.46).

Таким же чином ми знаходимо вираз для моменту другого порядку величини Δ_t

$$\begin{aligned} \langle \Delta_t^2 \rangle &= \left(\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_-}\right)^2 t^2 - \frac{4\lambda_+(\lambda_+ - 3\lambda_-)}{(\lambda_+ + \lambda_-)^3} t \\ &\quad + \frac{8\lambda_+(\lambda_+ - 2\lambda_-)}{(\lambda_+ + \lambda_-)^4} \left(1 - e^{-(\lambda_+ + \lambda_-)t}\right) \\ &\quad - \frac{4\lambda_+(\lambda_+ - \lambda_-)}{(\lambda_+ + \lambda_-)^3} t e^{-(\lambda_+ + \lambda_-)t}, \end{aligned} \quad (5.62)$$

із якого маємо $\langle \Delta_t^2 \rangle \sim (1/\lambda)t$ (якщо $\lambda_+ = \lambda_- = \lambda$) і $\langle \Delta_t^2 \rangle \sim (b/a)^2 t^2$ (якщо $\lambda_+ \neq \lambda_-$) при $t \rightarrow \infty$. Нарешті, вводячи дисперсію Δ_t як $\sigma^2(t) = \langle \Delta_t^2 \rangle - \langle \Delta_t \rangle^2$, із виразів (5.61) та (5.62) отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &= \frac{8\lambda_+}{(\lambda_+ + \lambda_-)^3} \left[\lambda_- - (\lambda_+ - \lambda_-) e^{-(\lambda_+ + \lambda_-)t} \right] t \\ &\quad + \frac{4\lambda_+}{(\lambda_+ + \lambda_-)^4} \left[\lambda_+ (1 - e^{-2(\lambda_+ + \lambda_-)t}) \right. \\ &\quad \left. - 4\lambda_- (1 - e^{-(\lambda_+ + \lambda_-)t}) \right]. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Звідси неважко помітити, що $\sigma^2(t) \sim (\nu^2/a^3)t$ при $t \rightarrow \infty$ як для симетричного, так і несиметричного режиму узагальненого телеграфного процесу.

Висновки до розділу 5

1. Знайдено точні релаксаційні закони для дворівневих систем, чия модель була побудована в попередньому розділі. Серед отриманих результатів точний опис дебаєвської релаксації, яка задається експоненціальним розподілами часів перебування процесу в “верхньому” і “нижньому” станах; осцилюючих релаксаційних режимів, що визначаються розподілами Ерланга; а також аномально повільних релаксаційних законів, які задаються розподілами Міттаг-Леффлера та односторонніми розподілами Леві.

2. Проведено детальний аналіз отриманих результатів. Зокрема, для степеневих законів релаксації, що визначаються розподілами Леві та Міттаг-Леффлера, встановлено їх представлення у вигляді перетворень Лапласа, які є зручними для розрахунків при великих значеннях часу, а також представлення у термінах функціональних рядів, що є швидко збіжними, а тому практичними для числових обчислень.

3. Одержано рівняння типу Монтролла-Вейсса, що описує розподіл випадкового процесу, який показує на скільки довше дворівнева система перебуває у “верхньому” стані, ніж у “нижньому”. Дане рівняння було використано для знаходження точних густин ймовірності і основних статистичних характеристик зазначеного процесу у випадку, якщо зміна структурних елементів дворівневої системи підпорядковується узагальненому телеграфному процесу. До того ж проведено числове моделювання, що повністю підтвердило всі аналітично знайдені у розділі результати.

Основні результати цього розділу опубліковано в статтях [5, 6].

ОСНОВНІ ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі, використовуючи концепцію неперервних у часі випадкових блукань, вперше вивчено транспортні та релаксаційні властивості широкого кола стохастичних систем з надповільною еволюцією. Зокрема, на захист виносяться наступні основні наукові результати:

1. Вперше досліджено процес надповільних польотів Леві, що характеризуються важкими хвостами розподілу довжин стрибків випадкових блукань та надважкими хвостами розподілу часів очікування між стрибками. Використовуючи рівняння Монтролла-Вейсса та тауберову теорему Карамати, знайдено всі можливі граничні густини ймовірності та відповідні їм масштабуючі функції часу, що визначають асимптотичну поведінку масштабованих надповільних польотів Леві. Проведено повну класифікацію граничних густин ймовірності та масштабуючих функцій в залежності від параметрів розподілів довжин стрибків та часів очікування між ними. Показано, що на відміну від масштабуючих функцій, вид яких залежить від параметрів обох розподілів, граничні густини визначаються лише параметрами розподілу довжин стрибків і можуть мати або важкі хвости, або бути одно/двосторонніми експоненціальними функціями.

2. Знайдено представлення граничних густин ймовірності для масштабованих польотів Леві у вигляді (1) оберненого перетворення Фур'є, (2) оберненого перетворення Мелліна, (3) перетворення Лапласа, (4) H -функції Фокса та (5) швидко збіжних степеневих рядів. За їх допомогою досліджено не тільки асимптотичну поведінку граничних густин ймовірності, але й показано, що в багатьох випадках граничні густини можуть бути виражені в термінах простих спеціальних функцій. Шляхом числового моделювання випадкових блукань, узагальненого на випадок статистичних розподілів з надважкими хвостами, підтверджено існування усіх типів граничних густин, передбачених теоретично.

3. Побудовано модель релаксаційних процесів у дворівневих системах, структурні елементи яких еволюціонують незалежно один від одного у відповідності з дихотомічним процесом. В рамках теорії неперервних у часі випадкових

блукань отримано інтегральне рівняння, що описує релаксацію таких систем у загальному випадку довільних розподілів часів перебування їх структурних елементів у “верхньому” та “нижньому” станах. За допомогою цього рівняння вперше визначено асимптотичні закони релаксації при наявності важких та/або надважких хвостів зазначених розподілів. Показано, що в цих випадках релаксація відбувається за аномальними (повільними та надповільними) законами, які є універсальними для зазначених систем.

4. Знайдено точні закони релаксації дворівневих систем, для яких час перебування їх структурних елементів у “верхньому” та “нижньому” станах характеризується (1) експоненціальними розподілами, (2) розподілами Ерланга, (3) розподілами Міттаг-Леффлера та (4) односторонніми розподілами Леві. Встановлено, що у першому випадку відбувається дебайська релаксація, у другому випадку релаксація має осцилюючий характер, а у третьому та четвертому випадках реалізуються аномально повільні режими релаксації. Усі закони релаксації дворівневих систем, як точні, так і асимптотичні, підтвердженні шляхом числового моделювання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Asymptotic solutions of decoupled continuous-time random walks with superheavy-tailed waiting time and heavy-tailed jump length distributions / S. I. Denisov, S. B. Yuste, Yu. S. Bystrik et al. // Phys. Rev. E. — 2011. — Vol. 84, no. 6. — P. 061143.
2. Denisov S. I., Bystrik Yu. S., Kantz H. Limiting distributions of continuous-time random walks with superheavy-tailed waiting times // Phys. Rev. E. — 2013. — Vol. 87, no. 2. — P. 022117.
3. Быстрик Ю. С. Численное исследование законов сверхмедленной диффузии для определенного класса непрерывных во времени случайных блужданий // J. Nano-Electron. Phys. — 2016. — Vol. 8, no. 1. — P. 01044.
4. Denisov S. I., Bystrik Yu. S., Kantz H. Asymptotic solutions of decoupled continuous-time random walks with superheavy-tailed waiting time and heavy-tailed jump length // Proceedings of The 2nd Internetional Conference “Nanomaterials: Applications and Properties” (Alushta, 17-22 September 2012). — Sumy, 2012. — Vol. 1, no. 4. — P. 04MFPN17 (4pp).
5. Denisov S. I., Bystrik Yu. S. Continuous-time Random Walk Model of Relaxation of Two-state Systems // Acta Phys. Pol. B. — 2015. — Vol. 46, no. 5. — P. 931.
6. Быстрик Ю. С., Денисова Л. А. Аномальные релаксационные процессы в двухуровневых системах // J. Nano-Electron. Phys. — 2015. — Vol. 7, no. 3. — P. 03049.
7. Denisov S. I., Bystrik Yu. S. Statistics of bounded processes driven by Poisson white noise // Phys. A. — 2019. — Vol. 515. — P. 38 – 46.
8. Denisov S. I., Bystrik Yu. S. Exact stationary solutions of the Kolmogorov–Feller equation in a bounded domain // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. — 2019. — Vol. 74. — P. 248 – 259.

9. Denisov S. I., Bystrik Yu. S., Kantz H. Long-time behavior of the continuous-time random walk with a superheavy-tailed distribution of waiting times // Proceedings of the 3rd International Conference “Quantum Electrodynamics and Statistical Physics” (Kharkov, August 29 – September 2, 2011). – Kharkov, 2011. – P. 135.
10. Быстрик Ю. С., Денисов С. И. Релаксационные процессы в диахотомических системах // Збірник тез школи-семінару “Багатомасштабне моделювання фізичних процесів у конденсованих середовищах” (Суми, 21-22 жовтня 2014 р.). – Суми, 2014. – С. 23.
11. Denisov S. I., Bystrik Yu. S. New asymptotic solutions of the unbiased continuous-time random walks // Збірник тез науково-практичної конференції “Фізика, електроніка, електротехніка – 2011” (Суми, 18-22 квітня 2011 р.). – Суми, 2011. – С. 31.
12. Denisov S. I., Bystrik Yu. S. Long-time solutions of decoupled continuous-time random walks with asym-metric heavy-tailed jump length distributions // Збірник тез науково-практичної конференції “Фізика, електроніка, електротехніка – 2012” (Суми, 16-21 квітня 2012 р.). – Суми, 2012. – С. 30.
13. Bystrik Yu. S., Denisov S. I. Laws of anomalous superslow diffusion // Збірник тез науково-практичної конференції “Фізика, електроніка, електротехніка – 2013” (Суми, 22-27 квітня 2013 р.). – Суми, 2013. – С. 53.
14. Быстрик Ю. С., Денисов С. И. Процессы релаксации в двухуровневых системах // Збірник тез науково-практичної конференції “Фізика, електроніка, електротехніка – 2015” (Суми, 20-25 квітня 2015 р.). – Суми, 2015. – С. 73.
15. Бистрик Ю. С., Денисов С. И. Асимптотичні у часі густини ймовірності для надповільних польотів Леві // Збірник тез науково-практичної конференції “Інформатики, математика, автоматика – 2019” (Суми, 23-26 квітня 2019 р.). – Суми, 2019. – С. 194.
16. Bystrik Yu. S., Denisov S. I. Stationary Kolmogorov-Feller equation: Exact solutions // Збірник тез науково-практичної конференції “Інформатики, ма-

- тематика, автоматика – 2019” (Суми, 23-26 квітня 2019 р.). – Суми, 2019. – C. 192.
17. Einstein A. On the movement of small particles suspended in stationary liquids required by the molecular-kinetic theory of heat // Ann. Phys. (Berl.). – 1905. – Vol. 322. – P. 549–560.
 18. Perrin J. Mouvement brownien et réalité moléculaire // Annales de Chimie et de Physique. – 1909. – Vol. 18. – P. 1–114.
 19. von Smoluchowski M. Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen // Ann. Phys. (Berl.). – 1906. – Vol. 326. – P. 756–780.
 20. Langevin P. Sur la théorie du mouvement brownien // C. R. Acad. Sci. (Paris). – 1908. – Vol. 146. – P. 530–533.
 21. Bachelier L. Théorie de la spéculation // Ann. Sci. Ec. Norm. Super. – 1900. – Vol. 3, no. 17. – P. 21–86.
 22. Pearson K. The Problem of the Random Walk // Nature. – Vol. 72, no. 1. – P. 294.
 23. Brown R. A brief Account of Microscopical Observations made in the Months of June, July and August 1827, on the Particles contained in the Pollen of Plants; and on the general Existence of active Molecules in Organic and Inorganic Bodies // Philos. Mag. – 1828. – Vol. 4, no. 21. – P. 161–173.
 24. Rayleigh J. W. S. The Problem of the Random Walk // Nature. – Vol. 72, no. 1. – P. 318.
 25. Kluyver J. C. A local probability problem // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. – 1906. – Vol. 8. – P. 341–350.
 26. Watson G. N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. – 2nd edition. – Cambridge : Cambridge University Press, 1944.
 27. Bouchaud J. P., Georges A. Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical applications // Phys. Rep. – 1990. – Vol. 195, no. 4–5. – P. 127 – 293.
 28. Lévy Flights and Related Topics in Physics / Ed. by M. F. Shlesinger,

- G. M. Zaslavsky, U. Frisch. — Vol. 450 of Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag, 1995.
29. Zaslavsky G.M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // Phys. Rep. — 2002. — Vol. 371, no. 6. — P. 461 – 580.
 30. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // Phys. Rep. — 2000. — Vol. 339, no. 1. — P. 1–77.
 31. ben-Avraham D., Havlin S. Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems. — Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2005.
 32. Anomalous transport: Foundations and applications / Ed. by R. Klages, G. Radons, I. M. Sokolov. — Berlin : Wiley-VCH, 2008.
 33. Zaburdaev V., Denisov S., Klafter J. Lévy walks // Rev. Mod. Phys. — 2015. — Vol. 87, no. 2. — P. 483–530.
 34. Bray A. J., Majumdar S. N., Schehr G. Persistence and first-passage properties in nonequilibrium systems // Adv. Phys. — 2013. — Vol. 62, no. 3. — P. 225–361.
 35. Hilfer R., Anton L. Fractional master equations and fractal time random walks // Phys. Rev. E. — 1995. — Feb. — Vol. 51, no. 2. — P. R848–R851.
 36. Saichev A. I., Zaslavsky G. M. Fractional kinetic equations: solutions and applications // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 1997. — Vol. 7, no. 4. — P. 753–764.
 37. Metzler R., Barkai E., Klafter J. Anomalous Diffusion and Relaxation Close to Thermal Equilibrium: A Fractional Fokker-Planck Equation Approach // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Vol. 82, no. 18. — P. 3563–3567.
 38. Barkai E., Metzler R., Klafter J. From continuous time random walks to the fractional Fokker-Planck equation // Phys. Rev. E. — 2000. — Vol. 61, no. 1. — P. 132–138.
 39. Fractional dynamics: recent advances / Ed. by K. Joseph, S.-C. Lim, R. Metzler. — Singapore : World Scientific, 2011.
 40. Measures of Complexity / Ed. by L. Peliti, A. Vulpiani. — Berlin : Springer, 1988.
 41. Cooperative Dynamics in Complex Systems / Ed. by H. Takayama. — Berlin :

- Springer, 1988.
42. Goldenfeld N., Kadanoff L. P. Simple Lessons from Complexity // *Science*. — 1999. — Vol. 284. — P. 87.
 43. Debye P. Polar Molecules. — New York : Dover, 1945.
 44. Dattagupta S. Relaxation Phenomena in Condensed Matter Physics. — Orlando : Academic Press, 1987.
 45. Tschoegl N. W. The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior. — Heidelberg : Springer, 1989.
 46. Ngai K. L. Relaxation and Diffusion in Complex Systems. — New York : Springer, 2011.
 47. Kohlrausch R. Theorie des elektrischen Rückstandes in der Leidener Flasche // *Ann. Phys. (Berl.)*. — 1854. — Vol. 167, no. 2. — P. 179–214.
 48. Williams G., Watts D. C. Non-symmetrical dielectric relaxation behaviour arising from a simple empirical decay function // *Trans. Faraday Soc.* — 1970. — Vol. 66, no. 0. — P. 80–85.
 49. Fröhlich H. Theory of Dielectrics. — 2nd edition. — 1958.
 50. Jonscher A. K. Dielectric relaxation in solids // *J. Phys. D*. — 1999. — Vol. 32, no. 14. — P. R57–R70.
 51. Shlesinger M. F., Montroll E. W. On the Williams-Watts function of dielectric relaxation // *Proc. Natl. Acad. Sci.* — 1984. — Vol. 81, no. 4. — P. 1280–1283.
 52. Models of Hierarchically Constrained Dynamics for Glassy Relaxation / R. G. Palmer, D. L. Stein, E. Abrahams, P. W. Anderson // *Phys. Rev. Lett.* — 1984. — Vol. 53, no. 10. — P. 958–961.
 53. Klafter J., Shlesinger M. F. On the relationship among three theories of relaxation in disordered systems // *Proc. Natl. Acad. Sci.* — 1986. — Vol. 84, no. 4. — P. 848–851.
 54. Blumen A., Klafter J., Zumofen G. Models for Reaction Dynamics in Glasses. In: Zschokke I. (Ed.) *Optical Spectroscopy of Glasses*. — Dordrecht : Springer, 1986.
 55. Universality classes for asymptotic behavior of relaxation processes in systems

- with dynamical disorder: Dynamical generalizations of stretched exponential / M. O. Vlad, R. Metzler, T. F. Nonnenmacher, M. C. Mackey // J. Math. Phys. — 1996. — Vol. 37, no. 5. — P. 2279–2306.
56. Pavesi L., Ceschini M. Stretched-exponential decay of the luminescence in porous silicon // Phys. Rev. B. — 1993. — Vol. 48, no. 23. — P. 17625–17628.
 57. Reuven C. Apparent stretched-exponential luminescence decay in crystalline solids // J. Lumin. — 2003. — Vol. 102-103. — P. 510 – 518.
 58. Berberan-Santos M.N., Bodunov E.N., Valeur B. Mathematical functions for the analysis of luminescence decays with underlying distributions 1. Kohlrausch decay function (stretched exponential) // Chem. Phys. — 2005. — Vol. 315, no. 1. — P. 171 – 182.
 59. Agmon N., Szabo A. Theory of reversible diffusion?influenced reactions // J. Chem. Phys. — 1990. — Vol. 92, no. 9. — P. 5270–5284.
 60. Reiner M. Rheologie in Elementarer Darstellung. — Leipzig : VEB Fachbuchverlag, 1969.
 61. Unexpected Power-law Stress Relaxation of Entangled Ring Polymers / M. Kapnistos, M. Lang, D. Vlassopoulos et al. // Nature Mater. — 2008. — 11. — Vol. 7. — P. 997–1002.
 62. Blair G. W. S. A New Criterion for Expressing the 'Intensity of Firmness' of Soft Bodies // Nature. — 1943. — Vol. 152. — P. 412.
 63. Event-Driven Power-Law Relaxation in Weak Turbulence / L. Silvestri, L. Fronzoni, P. Grigolini, P. Allegrini // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Vol. 102, no. 1. — P. 014502.
 64. Evans J. W. Random and cooperative sequential adsorption // Rev. Mod. Phys. — 1993. — Vol. 65, no. 4. — P. 1281–1329.
 65. Krapivsky P., Redner S., Ben-Naim E. A Kinetic View of Statistical Physics. — Cambridge : Cambridge University Press, 2010.
 66. Lillo F., Mantegna R. N. Power-law relaxation in a complex system: Omori law after a financial market crash // Phys. Rev. E. — 2003. — Vol. 68, no. 1. — P. 016119.

67. Metzler R., Klafter J. Anomalous Stochastic Processes in the Fractional Dynamics Framework: Fokker-Planck Equation, Dispersive Transport, and Non-Exponential Relaxation // *Adv. Chem. Phys.* — 2001. — Vol. 116. — P. 223 – 264.
68. Cole K. S., Cole R. H. Dispersion and Absorption in Dielectrics I. Alternating Current Characteristics // *J. Chem. Phys.* — 1941. — Vol. 9, no. 4. — P. 341–351.
69. Coffey W. T., Kalmykov Yuri P., Titov S. V. Fractional Rotational Diffusion and Anomalous Dielectric Relaxation in Dipole Systems // *Fractals, Diffusion, and Relaxation in Disordered Complex Systems*. — John Wiley & Sons, Ltd, 2006. — P. 285–437.
70. Coffey W. T., Kalmykov Yu. P., Waldron J. T. *The Langevin Equation: With Applications to Stochastic Problems in Physics, Chemistry and Electrical Engineering*. — 3nd edition. — Singapore : World Scientific, 2012.
71. Coffey W. T., Kalmykov Yu. P., Titov S. V. Anomalous dielectric relaxation in the context of the Debye model of noninertial rotational diffusion // *J. Chem. Phys.* — 2002. — Vol. 116, no. 15. — P. 6422–6426.
72. Glöckle W. G., Nonnenmacher T. F. Fractional integral operators and Fox functions in the theory of viscoelasticity // *Macromolecules*. — 1991. — Vol. 24. — P. 6426–6434.
73. Glöckle W. G., Nonnenmacher T. F. Fox function representation of non-debye relaxation processes // *J. Stat. Phys.* — 1993. — Vol. 71, no. 3. — P. 741–757.
74. Glöckle W. G., Nonnenmacher T. F. Fractional relaxation and the time-temperature superposition principle // *Rheol. Acta*. — 1994. — Vol. 33, no. 4. — P. 337–343.
75. Glöckle W. G., Nonnenmacher T. F. A fractional calculus approach to self-similar protein dynamics // *Biophys. J.* — 1995. — Vol. 68, no. 1. — P. 46–53.
76. Randeria M., Sethna J. P., Palmer R. G. Low-Frequency Relaxation in Ising Spin-Glasses // *Phys. Rev. Lett.* — 1985. — Vol. 54, no. 12. — P. 1321–1324.
77. Activated dynamics in a two-dimensional Ising spin glass: $\text{Rb}_2\text{Cu}_{1-x}\text{Co}_x\text{F}_4$ /

- C. Dekker, A. F. M. Arts, H. W. de Wijn et al. // Phys. Rev. B. — 1989. — Vol. 40, no. 16. — P. 11243–11251.
78. Blumen A. On the direct energy transfer via exchange to randomly distributed acceptors // J. Chem. Phys. — 1980. — Vol. 72, no. 4. — P. 2632–2640.
79. Blumen A. Excitation transfer from a donor to acceptors in condensed media: a unified approach // Il Nuovo Cimento B. — 1981. — Vol. 63, no. 1. — P. 50–58.
80. Morgan Jack R., El Sayed M. A. Mechanism switching and trapping of triplet-triplet energy transfer in an orientationally disordered molecular solid // J. Phys. Chem. — 1983. — Vol. 87, no. 12. — P. 2178–2185.
81. Miller J. R. Fast electron transfer reactions in a rigid matrix; Further evidence for quantum mechanical tunneling // Chem. Phys. Lett. — 1973. — Vol. 22, no. 1. — P. 180 – 182.
82. Beitz J. V., Miller J. R. Exothermic rate restrictions on electron transfer in a rigid medium // J. Chem. Phys. — 1979. — Vol. 71. — P. 4579–4595.
83. Friedrich J., Blumen A. Patterns of relaxation in disordered materials // Phys. Rev. B. — 1985. — Vol. 32, no. 2. — P. 1434–1435.
84. Slow relaxation and compaction of granular system / P. Richard, M. Nicodemi, R. Delannay et al. // Nature Materials. — 2005. — Vol. 4. — P. 121–128.
85. Slow relaxation in granular compaction / E. Ben-Naim, J.B. Knight, E.R. Nowak et al. // Phys. D. — 1998. — Vol. 123, no. 1. — P. 380 – 385.
86. Jin X., Tarjus G., Talbot J. An adsorption-desorption process on a line: kinetics of the approach to closest packing // J. Phys. A. — 1994. — Vol. 27, no. 7. — P. L195–L200.
87. Privman V., Barma M. Random sequential adsorption on a line: Mean?field theory of diffusional relaxation // J. Chem. Phys. — 1992. — Vol. 97, no. 9. — P. 6714–6719.
88. Clarke S. M., Terentjev E. M. Slow Stress Relaxation in Randomly Disordered Nematic Elastomers and Gels // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Vol. 81, no. 20. — P. 4436–4439.
89. A Hotta A., Terentjev E. M. Long-time stress relaxation in polyacrylate nematic

- liquid crystalline elastomers // J. Phys. Conden. Matter. — 2001. — Vol. 13, no. 50. — P. 11453–11464.
90. Sperl M. Logarithmic relaxation in a colloidal system // Phys. Rev. E. — 2003. — Vol. 68, no. 3. — P. 031405.
91. Brey J. J., Prados A. Slow logarithmic relaxation in models with hierarchically constrained dynamics // Phys. Rev. E. — 2001. — Vol. 63, no. 2. — P. 021108.
92. Cang H., Novikov V., Fayer M. D. Logarithmic decay of the orientational correlation function in supercooled liquids on the Ps to Ns time scale // J. Chem. Phys. — 2003. — Vol. 118. — P. 2800–2807.
93. Lagi M., Baglioni P., Chen S.-H. Logarithmic Decay in Single-Particle Relaxation of Hydrated Lysozyme Powder // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Vol. 103, no. 10. — P. 108102.
94. Logarithmic Chain-Exchange Kinetics of Diblock Copolymer Micelles / R. Lund, L. Willner, J. Stellbrink et al. // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 96, no. 6. — P. 068302.
95. Complex Local Dynamics in DNA on the Picosecond and Nanosecond Time Scales / E. B. Brauns, M. L. Madaras, R. S. Coleman et al. // Phys. Rev. Lett. — 2002. — Vol. 88, no. 15. — P. 158101.
96. Aoki K., Cao J., Hoshino Y. Logarithmic relaxation of electrochemical insulating-to-conducting conversion at polyaniline films: interpretation by electric percolation // Electrochim. Acta. — 1994. — Vol. 39, no. 15. — P. 2291 – 2297.
97. Density relaxation in a vibrated granular material / J. B. Knight, C. G. Fandrich, C. N. Lau et al. // Phys. Rev. E. — 1995. — Vol. 51, no. 5. — P. 3957–3963.
98. Compaction Dynamics of Wet Granular Assemblies / J. E. Fiscina, G. Lumay, F. Ludewig, N. Vandewalle // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 105, no. 4. — P. 048001.
99. Similarity of wet granular packing to gels / J. Li, Y. Cao, C. Xia et al. // Nat. Commun. — 2014. — Vol. 5. — P. 5014.
100. Goldstein S. On diffusion by discontinuous movements, and on the telegraph

- equation // Quart. J. Mech. Appl. Math. — 1951. — Vol. 4, no. 2. — P. 129–156.
101. Kac M. A stochastic model related to the telegrapher's equation // Rocky Mount. J. Math. — 1974. — Vol. 4, no. 3. — P. 497–509.
102. Kolesnik A. D., Ratanov N. Telegraph Processes and Option Pricing. — Heidelberg : Springer, 2013.
103. Thomson W. On the Theory of the Electric Telegraph // Proc. Roy. Soc. Lond. — 1854. — Vol. 7. — P. 382–399.
104. Lévy Paul. Sur certains processus stochastiques homogènes // Compos. Math. — 1940. — Vol. 7. — P. 283–339.
105. Feller W. An introduction to probability theory and its applications. Vol. II. — 2nd edition. — New York : John Wiley & Sons Inc., 1971.
106. Lamperti J. An occupation time theorem for a class of stochastic processes // Trans. Amer. Math. Soc. — 1958. — Vol. 88. — P. 380–387.
107. Barkai E. Residence Time Statistics for Normal and Fractional Diffusion in a Force Field // J. Stat. Phys. — 2006. — Vol. 123. — P. 883–907.
108. Burov S., Barkai E. Occupation Time Statistics in the Quenched Trap Model // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Vol. 98, no. 25. — P. 250601.
109. Bel G., Barkai E. Weak Ergodicity Breaking in the Continuous-Time Random Walk // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 94, no. 24. — P. 240602.
110. Magnetic bistability in a metal-ion cluster / R. Sessoli, D. Gatteschi, A. Caneschi, M. A. Novak // Nature. — 1993. — Vol. 365. — P. 141–143.
111. Macroscopic quantum tunnelling of magnetization in a single crystal of nanomagnets / L. Thomas, F. Lioni, R. Ballou et al. // Nature. — 1996. — 09. — Vol. 383.
112. Quantum Tunneling of the Magnetization in an Iron Cluster Nanomagnet / C. Sangregorio, T. Ohm, C. Paulsen et al. // Phys. Rev. Lett. — 1997. — Vol. 78, no. 24. — P. 4645–4648.
113. Cobalt(II)-Nitronyl Nitroxide Chains as Molecular Magnetic Nanowires / A. Caneschi, D. Gatteschi, N. Lalioti et al. // Angew. Chem. — 2001. — Vol. 40, no. 9. — P. 1760–1763.

114. Evidence for Single-Chain Magnet Behavior in a Mn III -Ni II Chain Designed with High Spin Magnetic Units: A Route to High Temperature Metastable Magnets / R. Clérac, H. Miyasaka, M. Yamashita, C. Coulon // J. Am. Chem. Soc. — 2002. — 11. — Vol. 124. — P. 12837–44.
115. A Single-Chain Magnet Formed by a Twisted Arrangement of Ions with Easy-Plane Magnetic Anisotropy / T. Kajiwara, M. Nakano, Y. Kaneko et al. // J. Am. Chem. Soc. — 2005. — Vol. 127, no. 29. — P. 10150–10151.
116. Sun H.-L., Wang Z.-M., Gao S. Strategies towards single-chain magnets // Coord. Chem. Rev. — 2010. — Vol. 254, no. 9. — P. 1081 – 1100.
117. Margolin G., Barkai E. Nonergodicity of a Time Series Obeying Lévy Statistics // J. Stat. Phys. — 2006. — Vol. 122, no. 1. — P. 137–167.
118. Nadler W., Stein D. L. Biological Transport Processes and Space Dimension // Proc. Natl. Acad. Sci. — 1991. — Vol. 88. — P. 6750–6754.
119. Goychuk I., Hänggi P. Ion channel gating: A first-passage time analysis of the Kramers type // Proc. Natl. Acad. Sci. — 2002. — Vol. 99. — P. 3552–3556.
120. Dewey T. D. From microarrays to networks: mining expression time series // Drug Discov. Today. — 2002. — Vol. 7, no. 20. — P. s170 – s175.
121. Roy S., Bose I., Manna S. S. A Cooperative Stochastic Model of Gene Expression // Int. J. Mod. Phys. C. — 2001. — Vol. 12. — P. 413–420.
122. Masuda N., Aihara K. Ergodicity of Spike Trains: When Does Trial Averaging Make Sense? // Neural Computat. — 2003. — Vol. 15, no. 6. — P. 1341–1372.
123. From molecular noise to behavioural variability in a single bacterium / E. Korobkova, T. Emonet, J. M. G. Vilar et al. // Nature. — 2004. — Vol. 428. — P. 574–578.
124. Exponential and Power-Law Kinetics in Single-Molecule Fluorescence Intermittency / M. Haase, C. G. Hubner, E. Reuther et al. // J. Phys. Chem. B. — 2004. — Vol. 108, no. 29. — P. 10445–10450.
125. Fluorescence intermittency in single cadmium selenide nanocrystals / M. Niurnal, B. O. Dabbousi, M. G. Bawendi et al. // Nature. — 1996. — Vol. 383. — P. 802–804.

126. Modeling distributed kinetics in isolated semiconductor quantum dots / M. Kuno, D. P. Fromm, S. T. Johnson et al. // Phys. Rev. B. — 2003. — Vol. 67, no. 12. — P. 125304.
127. Blinking statistics in single semiconductor nanocrystal quantum dots / K. T. Shimizu, R. G. Neuhauser, C. A. Leatherdale et al. // Phys. Rev. B. — 2001. — Vol. 63, no. 20. — P. 205316.
128. Bunching and antibunching in the fluorescence of semiconductor nanocrystals / G. Messin, J. P. Hermier, E. Giacobino et al. // Opt. Lett. — 2001. — Vol. 26. — P. 1891–1893.
129. Statistical Aging and Nonergodicity in the Fluorescence of Single Nanocrystals / X. Brokmann, J.-P. Hermier, G. Messin et al. // Phys. Rev. Lett. — 2003. — Vol. 90, no. 12. — P. 120601.
130. Zumofen G., Hohlbein J., Hübner C. G. Recurrence and Photon Statistics in Fluorescence Fluctuation Spectroscopy // Phys. Rev. Lett. — 2004. — Vol. 93, no. 26. — P. 260601.
131. Godréche C., Luck J. M. Statistics of the Occupation Time of Renewal Processes // J. Stat. Phys. — 2001. — Vol. 104, no. 3. — P. 489–524.
132. Statistics of persistent events: An exactly soluble model / A. Baldassarri, J. P. Bouchaud, I. Dornic, C. Godréche // Phys. Rev. E. — 1999. — Vol. 59. — P. R20–R23.
133. Miyaguchi T., Uneyama T., Akimoto T. Brownian motion with alternately fluctuating diffusivity: Stretched-exponential and power-law relaxation // Phys. Rev. E. — 2019. — Vol. 100, no. 1. — P. 012116.
134. Fuliński A. Relaxation, noise-induced transitions, and stochastic resonance driven by non-Markovian dichotomic noise // Phys. Rev. E. — 1995. — Vol. 52, no. 4. — P. 4523–4526.
135. Noise-induced phase synchronization enhanced by dichotomic noise / R. Rozenfeld, J. A. Freund, A. Neiman, L. Schimansky-Geier // Phys. Rev. E. — 2001. — Vol. 64, no. 5. — P. 051107.
136. Stefani F. D., Hoogenboom J. P., Barkai E. Beyond quantum jumps: Blinking

- nanoscale light emitters // Phys. Today. — 2009. — Vol. 62, no. 2. — P. 34–39.
137. Smith A. M., Nie S. Semiconductor Nanocrystals: Structure, Properties, and Band Gap Engineering // Acc. Chem. Res. — 2010. — Vol. 43, no. 2. — P. 190–200.
138. Efros Al. L., Rosen M. Random Telegraph Signal in the Photoluminescence Intensity of a Single Quantum Dot // Phys. Rev. Lett. — 1997. — Vol. 78, no. 6. — P. 1110–1113.
139. “On”/“off” fluorescence intermittency of single semiconductor quantum dots / M. Kuno, D. P. Fromm, H. F. Hamann et al. // J. Chem. Phys. — 2001. — Vol. 115, no. 2. — P. 1028–1040.
140. Einstein A. in: R. Fürth (Ed.), Investigations on the theory of the Brownian movement. — New York : Dover, 1956.
141. Doob J. L. Stochastic Processes. — New York : Wiley, 1953.
142. Crank J. The Mathematics of Diffusion. — 2nd edition. — Oxford : Clarendon Press, 1975.
143. Kampen N. G. V. Stochastic Processes in Physics and Chemistry. — 3rd edition. — North Holland : Elsevier, 2007.
144. Gardiner C. W. Handbook of Stochastic Methods: for Physics, Chemistry and the Natural Sciences. — 3rd edition. — Berlin : Springer, 2004.
145. Risken H. The Fokker-Planck-Equation: Methods of Solution and Applications. — 2nd edition. — Berlin : Springer-Verlag, 1989.
146. Hughes B. D. Random Walks and Random Environments, Vol. I: Random Walks. — Oxford : Clarendon Press, 1995.
147. Isichenko M. B. Percolation, statistical topography, and transport in random media // Rev. Mod. Phys. — 1992. — Vol. 64, no. 4. — P. 961–1043.
148. Shlesinger M. F., Zaslavsky G. M., Klafter J. Strange kinetics // Nature. — 1993. — Vol. 363. — P. 31–37.
149. Klafter J., Shlesinger M., Zumofen G. Beyond Brownian Motion // Phys. Today. — 1996. — Vol. 49. — P. 33–39.
150. Scher H., Montroll E. W. Anomalous transit-time dispersion in amorphous

- solids // Phys. Rev. B. — 1975. — Vol. 12, no. 6. — P. 2455–2477.
151. Klemm A., Metzler R., Kimmich R. Diffusion on random-site percolation clusters: Theory and NMR microscopy experiments with model objects // Phys. Rev. E. — 2002. — Vol. 65, no. 2. — P. 021112.
152. Golding I., Cox E. C. Physical Nature of Bacterial Cytoplasm // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 96, no. 9. — P. 098102.
153. Szymanski J., Weiss M. Elucidating the Origin of Anomalous Diffusion in Crowded Fluids // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Vol. 103, no. 3. — P. 038102.
154. In Vivo Anomalous Diffusion and Weak Ergodicity Breaking of Lipid Granules / J.-H. Jeon, V. Tejedor, S. Burov et al. // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Vol. 106, no. 4. — P. 048103.
155. Probability densities for the displacement of random walks on percolation clusters / S. Havlin, D. Havlin, B. Trus, G. H. Weiss // J. Phys. A. — 1985. — Vol. 18, no. 12. — P. L719–L722.
156. Structural and dynamical properties of the percolation backbone in two and three dimensions / M. Porto, A. Bunde, S. Havlin, H. E. Roman // Phys. Rev. E. — 1997. — Vol. 56, no. 2. — P. 1667–1675.
157. Young W., Pumir A., Pomeau Y. Anomalous diffusion of tracer in convection rolls // Phys. Fluids. — 1989. — Vol. 1, no. 3. — P. 462–469.
158. Subdiffusion and Anomalous Local Viscoelasticity in Actin Networks / F. Amblard, A. C. Maggs, B. Yurke et al. // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Vol. 77, no. 21. — P. 4470–4473.
159. Richardson L. F. Atmospheric Diffusion Shown on a Distance-Neighbour Graph // Proc. Royal Soc. Lond. — 1926. — Vol. 110, no. 756. — P. 709–737.
160. Kolmogorov A. The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds' Numbers // Akademiiia Nauk SSSR Doklady. — 1941. — Vol. 30. — P. 301–305.
161. Kolmogorov A. N. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number // J. Fluid Mech. — 1962. — Vol. 13, no. 1. — P. 82–85.

162. Mandelbrot B. B. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier // *J. Fluid Mech.* — 1974. — Vol. 62, no. 2. — P. 331–358.
163. Benzi R., Vulpiani A. Small-scale intermittency of turbulent flows // *J. Phys. A.* — 1980. — Vol. 13, no. 10. — P. 3319–3324.
164. Hentschel H. G. E., Procaccia I. Fractal nature of turbulence as manifested in turbulent diffusion // *Phys. Rev. A.* — 1983. — Vol. 27, no. 2. — P. 1266–1269.
165. Shlesinger M. F., West B. J., Klafter J. Lévy dynamics of enhanced diffusion: Application to turbulence // *Phys. Rev. Lett.* — 1987. — Vol. 58, no. 11. — P. 1100–1103.
166. Klafter J., Sokolov I. *First Steps in Random Walks: From Tools to Applications*. — Oxford : Oxford University Press, 2011.
167. Solomon T. H., Weeks E. R., Swinney H. L. Observation of anomalous diffusion and Lévy flights in a two-dimensional rotating flow // *Phys. Rev. Lett.* — 1993. — Vol. 71, no. 24. — P. 3975–3978.
168. Katori H., Schlipf S., Walther H. Anomalous Dynamics of a Single Ion in an Optical Lattice // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 79, no. 12. — P. 2221–2224.
169. Scaling laws of marine predator search behaviour / D. W. Sims, E. J. Southall, N. E. Humphries et al. // *Nature*. — 2008. — Vol. 451, no. 7182. — P. 1098–1102.
170. Environmental Context Explains Lévy and Brownian Movement Patterns of Marine Predators / N. Humphries, N. Queiroz, J. R. M. Dyer et al. // *Nature*. — 2010. — Vol. 465. — P. 1066–9.
171. Viswanathan G. M. Ecology: Fish in Lévy-flight foraging // *Nature*. — 2010. — Vol. 465. — P. 1018–9.
172. Geisel T., Nierwetberg J., Zacherl A. Accelerated Diffusion in Josephson Junctions and Related Chaotic Systems // *Phys. Rev. Lett.* — 1985. — Vol. 54, no. 7. — P. 616–619.
173. Bohr T., Pikovsky A. Anomalous diffusion in the Kuramoto-Sivashinsky equation // *Phys. Rev. Lett.* — 1993. — Vol. 70, no. 19. — P. 2892–2895.
174. Zumofen G., Klafter J., Blumen A. Trapping aspects in enhanced diffusion //

- J. Stat. Phys. — Vol. 65, no. 5. — P. 991–1013.
175. Iomin A. Richardson diffusion in neurons // Phys. Rev. E. — 2019. — Vol. 100, no. 1. — P. 010104.
176. Shlesinger M. Asymptotic solutions of continuous-time random walks // Journal of Statistical Physics. — 1974. — Vol. 10, no. 5. — P. 421–434.
177. Classical diffusion of a particle in a one-dimensional random force field / J. P. Bouchaud, A. Comtet, A. Georges, P. Le Doussal // Ann. Phys. — 1990. — Vol. 201, no. 2. — P. 285 – 341.
178. Zumofen G., Klafter J. Scale-invariant motion in intermittent chaotic systems // Phys. Rev. E. — 1993. — Vol. 47, no. 2. — P. 851–863.
179. Denisov S. I., Kantz H. Anomalous biased diffusion in a randomly layered medium // Phys. Rev. E. — 2010. — Vol. 81, no. 2. — P. 021117.
180. Sinai Ya. G. The Limiting Behavior of a One-Dimensional Random Walk in a Random Medium // Theory Probab. Appl. — 1982. — Vol. 27, no. 2. — P. 256–268.
181. Anomalous diffusion in random media of any dimensionality / Bouchaud, J. P., Comtet, A., Georges, A., Le Doussal, P. // J. Phys. France. — 1987. — Vol. 48, no. 9. — P. 1445–1450.
182. Comtet A., Dean D. S. Exact results on Sinai's diffusion // J. Phys. A. — Vol. 31, no. 43. — P. 8595–8605.
183. Kesten H. The limit distribution of Sinai's random walk in random environment // Phys. A. — 1986. — Vol. 138, no. 1. — P. 299–309.
184. Golosov A. O. Limit distributions for random walks in a random environment // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1983. — Vol. 271. — P. 25–29.
185. Golosov A. O. Localization of random walks in one-dimensional random environments // Comm. Math. Phys. — 1984. — Vol. 92, no. 4. — P. 491–506.
186. Random Multiplicative Processes and Transport in Structures with Correlated Spatial Disorder / S. Havlin, R. Blumberg Selinger, M. Schwartz et al. // Phys. Rev. Lett. — 1988. — Vol. 61, no. 13. — P. 1438–1441.
187. Havlin S., Weiss G. H. A new class of long-tailed pausing time densities for the

- CTRW // J. Stat. Phys. — 1990. — Vol. 58, no. 5. — P. 1267–1273.
188. Schiessel H., Sokolov I. M., Blumen A. Dynamics of a polyampholyte hooked around an obstacle // Phys. Rev. E. — 1997. — Vol. 56, no. 3. — P. R2390–R2393.
189. Iglói F., Turban L., Rieger H. Anomalous diffusion in aperiodic environments // Phys. Rev. E. — 1999. — Vol. 59, no. 2. — P. 1465–1474.
190. Dräger J., Klafter J. Strong Anomaly in Diffusion Generated by Iterated Maps // Phys. Rev. Lett. — 2000. — Vol. 84, no. 26. — P. 5998–6001.
191. Denisov S. I., Horsthemke W. Anomalous diffusion of particles driven by correlated noise // Phys. Rev. E. — 2000. — Vol. 62, no. 6. — P. 7729–7734.
192. Chechkin Aleksei, Klafter Joseph, M. Sokolov I. Fractional Fokker-Planck Equation for Ultraslow Kinetics. — Vol. 63, no. 3. — P. 326 – 332.
193. Anomalous diffusion for overdamped particles driven by cross-correlated white noise sources / S. I. Denisov, A. N. Vitrenko, W. Horsthemke, P. Hänggi // Phys. Rev. E. — 2006. — Vol. 73, no. 3. — P. 036120.
194. Denisov S. I., H. Kantz H. Continuous-time random walk theory of superslow diffusion // Europhys. Lett. — 2010. — Vol. 92, no. 3. — P. 30001.
195. Denisov S. I., Kantz H. Continuous-time random walk with a superheavy-tailed distribution of waiting times // Phys. Rev. E. — 2011. — Vol. 83, no. 4. — P. 041132.
196. Barthelemy P., Bertolotti J., Wiersma D. A Lévy flight for light // Nature. — 2008. — Vol. 453. — P. 495–498.
197. Role of quenching on superdiffusive transport in two-dimensional random media / P. Barthelemy, J. Bertolotti, K. Vynck et al. // Phys. Rev. E. — 2010. — Vol. 82, no. 1. — P. 011101.
198. Weak Localization of Light in Superdiffusive Random Systems / M. Burresi, V. Radhalakshmi, R. Savo et al. // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Vol. 108, no. 11. — P. 110604.
199. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. — Москва-Ленинград : ГТТИ, 1949.

200. Fischer H. A History of the Central Limit Theorem: From Classical to Modern Probability Theory. — New York : Springer, 2010.
201. Samorodnitsky G., Taqqu M.S. Stable Non-Gaussian Processes. — New York : Chapman and Hall, 1994.
202. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. — Москва : Наука, 1983.
203. Uchaikin V. V. Self-similar anomalous diffusion and Levy-stable laws // Phys.-Uspekhi. — 2003. — Vol. 46, no. 8. — P. 821–849.
204. Uchaikin V. V., Zolotarev V. M. Chance and Stability. Stable Distributions and Their Applications. — Berlin/New York : De Gruyter, 1999.
205. Учайкин В. В. Метод дробных производных. — Ульяновск : Издательство “Артишок”, 2008.
206. Holtsmark J. Über die Verbreiterung von Spektrallinien // Ann. Phys. (Berl.). — 1919. — Vol. 363, no. 7. — P. 577–630.
207. Chandrasekhar S. Stochastic Problems in Physics and Astronomy // Rev. Mod. Phys. — 1943. — Vol. 15, no. 1. — P. 1–89.
208. Pilkuhn H. The Interaction of Hadrons. — Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1967.
209. Mandelbrot B. B. Fractal Geometry of Nature. — San Francisco : W.H. Freeman and Company, 1982.
210. Lévy Statistics for Random Single-Molecule Line Shapes in a Glass / E. Barkai, A. V. Naumov, Yu. G. Vainer et al. // Phys. Rev. Lett. — 2003. — Vol. 91, no. 7. — P. 075502.
211. Brockmann D., Geisel T. Particle Dispersion on Rapidly Folding Random Heteropolymers // Phys. Rev. Lett. — 2003. — Vol. 91, no. 4. — P. 048303.
212. Sokolov I. M., Mai J., Blumen A. Paradoxal Diffusion in Chemical Space for Nearest-Neighbor Walks over Polymer Chains // Phys. Rev. Lett. — 1997. — Vol. 79, no. 5. — P. 857–860.
213. Kozma B., Hastings Matthew B., Korniss G. Diffusion Processes on Power-Law Small-World Networks // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 95, no. 1. —

P. 018701.

214. Klauder J. R., Anderson P. W. Spectral Diffusion Decay in Spin Resonance Experiments // Phys. Rev. — 1962. — Vol. 125, no. 3. — P. 912–932.
215. Zumofen G., J. Klafter J. Spectral random walk of a single molecule // Chem. Phys. Lett. — 1994. — Vol. 219, no. 3. — P. 303 – 309.
216. Mantegna R. N., Stanley H. E. Stochastic Process with Ultraslow Convergence to a Gaussian: The Truncated Lévy Flight // Phys. Rev. Lett. — 1994. — Vol. 73, no. 22. — P. 2946–2949.
217. Klafter J., Blumen A., Shlesinger M. F. Stochastic pathway to anomalous diffusion // Phys. Rev. A. — 1987. — Vol. 35, no. 7. — P. 3081–3085.
218. V. Yu. Zaburdaev V. Yu, Chukbar K. V. Enhanced superdiffusion and finite velocity of Levy flights // JETP. — 2002. — Vol. 94, no. 2. — P. 252–259.
219. Klafter J., Zumofen G. Lévy statistics in a Hamiltonian system // Phys. Rev. E. — 1994. — Vol. 49, no. 6. — P. 4873–4877.
220. Cipriani P., Denisov S., Politi A. From Anomalous Energy Diffusion to Levy Walks and Heat Conductivity in One-Dimensional Systems // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 94, no. 24. — P. 244301.
221. Kessler D. A., Barkai E. Theory of Fractional Lévy Kinetics for Cold Atoms Diffusing in Optical Lattices // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Vol. 108, no. 23. — P. 230602.
222. Lutz E., Renzoni F. Beyond Boltzmann-Gibbs statistical mechanics in optical lattices // Nature Physics. — 2013. — Vol. 9. — P. 615–619.
223. Weiss G. H. Aspects and Applications of the Random Walk. — Amsterdam : North-Holland, 1994.
224. Øksendal B. Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. — 6nd edition. — Berlin : Springer, 2014.
225. Peter Mörters P., Peres Yu. Brownian Motion. — Cambridge : Cambridge University Press, 2010.
226. Montroll E. W., Weiss G. H. Random Walks on Lattices. II // Journal of Mathematical Physics. — 1965. — Vol. 6, no. 2. — P. 167–181.

227. Scher H., Lax M. Stochastic Transport in a Disordered Solid. I. Theory // Phys. Rev. B. — 1973. — Vol. 7, no. 10. — P. 4491–4502.
228. Aghion E., Kessler D. A., Barkai E. Large Fluctuations for Spatial Diffusion of Cold Atoms // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Vol. 118, no. 26. — P. 260601.
229. Limit theorems for Lévy walks in dimensions: rare and bulk fluctuations / I. Fouzon, S. Denisov, V. Zaburdaev, E. Barkai // J. Phys. A. — 2017. — Vol. 50, no. 15. — P. 154002.
230. Aghion E., Kessler D. A., Barkai E. Asymptotic densities from the modified Montroll-Weiss equation for coupled CTRWs // Eur. Phys. J. B. — 2018. — Vol. 91, no. 1. — P. 17.
231. Renewal theory with fat-tailed distributed sojourn times: Typical versus rare / W. Wang, J. H. P. Schulz, W. Deng, E. Barkai // Phys. Rev. E. — 2018. — Vol. 98, no. 4. — P. 042139.
232. Klafter J., G. Zumofen G. Probability Distributions for Continuous-Time Random Walks with Long Tails // J. Phys. Chem. — 1994. — Vol. 98, no. 30. — P. 7366–7370.
233. Barkai E. Fractional Fokker-Planck equation, solution, and application // Phys. Rev. E. — 2001. — Vol. 63, no. 4. — P. 046118.
234. Barkai Eli. CTRW Pathways to the Fractional Diffusion Equation // Chemical Physics. — 2002. — Vol. 284, no. 2. — P. 13–27.
235. Stochastic calculus for uncoupled continuous-time random walks / G. Germano, M. Politi, E. Scalas, R. Schilling // Phys. Rev. E. — 2009. — Vol. 79, no. 6. — P. 066102.
236. Tunaley J. K. E. Asymptotic solutions of the continuous-time random walk model of diffusion // J. Stat. Phys. — 1974. — Vol. 11, no. 5. — P. 397–408.
237. Shlesinger M., Klafter J., Wong Y. Random walks with infinite spatial and temporal moments // J. Stat. Phys. — 1982. — Vol. 27. — P. 499–512.
238. Weissman H., Weiss G. H., Havlin S. Transport properties of the continuous-time random walk with a long-tailed waiting-time density // J. Stat. Phys. — 1989. — Vol. 57. — P. 301–317.

239. Kotulski M. Asymptotic Distributions of the Continuous-Time Random Walks: A Probabilistic Approach // *J. Stat. Phys.* — 1995. — 02. — Vol. 81.
240. Meerschaert M., Scheffler H.-P. Limit theorems for continuous-time random walks with infinite mean waiting times // *J. Appl. Prob.* — 2004. — Vol. 41. — P. 623–638.
241. Denisov S. I., Kantz H., Hänggi P. Langevin equation with super-heavy-tailed noise // *J. Phys. A.* — 2010. — Vol. 43, no. 28. — P. 285004.
242. Meerschaert M. M., Straka P. Semi-Markov approach to continuous time random walk limit processes // *Ann. Probab.* — 2014. — Vol. 42, no. 4. — P. 1699–1723.
243. Dubkov A., Spagnolo B. Generalized Wiener Process and Kolmogorov's Equation for Diffusion Induced by Non-Gaussian Noise Source // *Fluctuation Noise Lett.* — 2005. — Vol. 5, no. 2. — P. L267–L274.
244. Denisov, S. I., Horsthemke, W., Hänggi, P. Generalized Fokker-Planck equation: Derivation and exact solutions // *Eur. Phys. J. B.* — 2009. — Vol. 68, no. 4. — P. 567–575.
245. Zaburdaev V., Denisov S., Hänggi P. Perturbation Spreading in Many-Particle Systems: A Random Walk Approach // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 106, no. 18. — P. 180601.
246. Denisov S., Zaburdaev V., Hänggi P. Lévy walks with velocity fluctuations // *Phys. Rev. E.* — 2012. — Vol. 85, no. 3. — P. 031148.
247. Zaburdaev V., Schmiedeberg M., Stark H. Random walks with random velocities // *Phys. Rev. E.* — 2008. — Vol. 78, no. 1. — P. 011119.
248. Asymptotic densities of ballistic Lévy walks / D. Froemberg, M. Schmiedeberg, E. Barkai, V. Zaburdaev // *Phys. Rev. E.* — 2015. — Vol. 91, no. 2. — P. 022131.
249. Horsthemke W., Lefever R. Noise-Induced Transitions. Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology. — 2nd edition. — Berlin : Springer-Verlag, 2006.
250. Lévy anomalous diffusion and fractional Fokker-Planck equation / V. V. Yanovsky, A. V. Chechkin, D. Schertze, A. V. Tur // *Phys. A.* — 2000. —

Vol. 282, no. 1. — P. 13 – 34.

251. Jespersen S., Metzler R., Fogedby H. C. Lévy flights in external force fields: Langevin and fractional Fokker-Planck equations and their solutions // Phys. Rev. E. — 1999. — Vol. 59, no. 3. — P. 2736–2745.
252. Denisov S. I., Hänggi P., Kantz H. Parameters of the fractional Fokker-Planck equation // Europhys. Lett. — 2009. — Vol. 85, no. 4. — P. 40007.
253. Denisov S., Kantz H. Probability distribution function for systems driven by superheavy-tailed noise // Eur. Phys. J. B. — 2011. — Vol. 80, no. 2. — P. 167–175.
254. Sancho J. M., San Miguel M. Langevin equations with colored noise. In: Moss F., McClintock P. (Eds.) Noise in nonlinear dynamical systems. — 1989. — P. 72–109.
255. Lindenberg K., West B. J. Langevin equations with colored noise. In: Moss F., McClintock P. (Eds.) Noise in nonlinear dynamical systems. — New York : VCH, 1990.
256. Hänggi P., Jung P. Langevin equations with colored noise. In: Prigogine I., Rice S. A. (Eds.) Advances in chemical physics: vol. 89. — 1989. — P. 239–326.
257. Wang P., Tartakovskiy A. M., Tartakovskiy D. M. Probability Density Function Method for Langevin Equations with Colored Noise // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Vol. 110, no. 14. — P. 140602.
258. Maltba T., Gremaud P. A., Tartakovskiy D. M. Nonlocal PDF methods for Langevin equations with colored noise // Journal of Computational Physics. — 2018. — Vol. 367. — P. 87–101.
259. Denisov S. I., Horsthemke W. Statistical properties of a class of nonlinear systems driven by colored multiplicative Gaussian noise // Phys. Rev. E. — 2002. — Vol. 65, no. 3. — P. 031105.
260. Denisov S. I., Horsthemke W. Exactly solvable model with an absorbing state and multiplicative colored Gaussian noise // Phys. Rev. E. — 2002. — Vol. 65, no. 6. — P. 061109.
261. Vitrenko A. N. Exactly solvable nonlinear model with two multiplicative

Gaussian colored noises.

262. Characterizing stochastic resonance in coupled bistable system with Poisson white noises via statistical complexity measures / M. He, W. Xu, Z. Sun, W. Jia // *Nonlinear Dynamics*. — 2017. — Vol. 88, no. 2. — P. 1163–1171.
263. Zhu H. T. Stochastic response of a vibro-impact Duffing system under external Poisson impulses // *Nonlinear Dynamics*. — 2015. — Vol. 82, no. 1. — P. 1001–1013.
264. Yang G. and Xu W., Huang D., Hao M. Stochastic Responses of Lightly Nonlinear Vibroimpact System with Inelastic Impact Subjected to External Poisson White Noise Excitation // *Math. Probl. Eng.* — 2018. — Vol. 2018. — P. 1–12.
265. Pan S.-S., Zhu W.-Q. Dynamics of a prey-predator system under Poisson white noise excitation // *Acta Mechanica Sinica*. — 2014. — Vol. 30, no. 5. — P. 739–745.
266. Jia W., Xu Y., Li D. Stochastic Dynamics of a Time-Delayed Ecosystem Driven by Poisson White Noise Excitation // *Entropy*. — 2018. — Vol. 20, no. 2.
267. Baule A., Sollich P. Rectification of asymmetric surface vibrations with dry friction: An exactly solvable model // *Phys. Rev. E*. — 2013. — Vol. 87, no. 3. — P. 032112.
268. Spiechowicz J., Hänggi P., Łuczka J. Brownian motors in the microscale domain: Enhancement of efficiency by noise // *Phys. Rev. E*. — 2014. — Vol. 90, no. 3. — P. 032104.
269. Hänggi P. Langevin description of markovian integro-differential master equations // *Z. Phys. B*. — 1980. — Vol. 36, no. 3. — P. 271–282.
270. First-passage time statistics: Processes driven by Poisson noise / E. Hernández-Garcia, L. Pesquera, M. A. Rodriguez, M. San Miguel // *Phys. Rev. A*. — 1987. — Vol. 36, no. 12. — P. 5774–5781.
271. Luczka J., R Bartussek R., Hänggi P. White-Noise-Induced Transport in Periodic Structures // *Europhys. Lett.* — 1995. — Vol. 31, no. 8. — P. 431–436.
272. Grigoriu M. Stochastic calculus: applications in science and engineering. — Boston : Birkhauser, 2002.

273. Gitterman M. The noisy oscillator. — Singapore : World Scientific, 2005.
274. Dubkov A. A., Rudenko O. V., Gurbatov S. N. Probability characteristics of nonlinear dynamical systems driven by δ -pulse noise // Phys. Rev. E. — 2016. — Vol. 93, no. 6. — P. 062125.
275. Vasta M. Exact stationary solution for a class of non-linear systems driven by a non-normal delta-correlated process // Int. J. Non-Linear. Mech. — 1995. — Vol. 30, no. 4. — P. 407 – 418.
276. Proppe C. Exact stationary probability density functions for non-linear systems under Poisson white noise excitation // Int. J. Non-Linear. Mech. — 2003. — Vol. 38, no. 4. — P. 557 – 564.
277. Rudenko O. V., Dubkov A. A., Gurbatov S. N. On exact solutions to the Kolmogorov–Feller equation // Dokl. Math. — 2016. — Vol. 94, no. 1. — P. 476–479.
278. Sokolov I. M., Klafter J. From diffusion to anomalous diffusion: A century after Einstein’s Brownian motion // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2005. — Vol. 15, no. 2. — P. 026103.
279. Majumdar S. N. Brownian functionals in physics and computer science // Curr. Sci. — 2005. — Vol. 88. — P. 2076–2092.
280. Fogedby H. C. Langevin equations for continuous time Lévy flights // Phys. Rev. E. — 1994. — Vol. 50, no. 2. — P. 1657–1660.
281. Fogedby H. C. Lévy Flights in Random Environments // Phys. Rev. Lett. — 1994. — Vol. 73, no. 19. — P. 2517–2520.
282. Eule S., Friedrich R. Subordinated Langevin equations for anomalous diffusion in external potentials – Biasing and decoupled external forces // Europh. Lett. — 2009. — Vol. 86, no. 3. — P. 30008.
283. Dybiec B., Gudowska-Nowak E. Subordinated diffusion and continuous time random walk asymptotics // Chaos. — 2010. — Vol. 20, no. 4. — P. 043129.
284. Baule A., Friedrich R. Joint probability distributions for a class of non-Markovian processes // Phys. Rev. E. — 2005. — Vol. 71, no. 2. — P. 026101.
285. Chechkin A. V., Hofmann M., Sokolov I. M. Continuous-time random walk with

- correlated waiting times // Phys. Rev. E. — 2009. — Vol. 80, no. 3. — P. 031112.
286. Sokolov I. M., Klafter J. Field-Induced Dispersion in Subdiffusion // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 97, no. 14. — P. 140602.
287. Use and Abuse of a Fractional Fokker-Planck Dynamics for Time-Dependent Driving / E. Heinsalu, M. Patriarca, I. Goychuk, P. Hänggi // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Vol. 99, no. 12. — P. 120602.
288. Shushin A. I. Effect of a time-dependent field on subdiffusing particles // Phys. Rev. E. — 2008. — Vol. 78, no. 5. — P. 051121.
289. Weron A., Magdziarz M., Weron K. Modeling of subdiffusion in space-time-dependent force fields beyond the fractional Fokker-Planck equation // Phys. Rev. E. — 2008. — Vol. 77, no. 3. — P. 036704.
290. Magdziarz M., Weron A., Klafter J. Equivalence of the Fractional Fokker-Planck and Subordinated Langevin Equations: The Case of a Time-Dependent Force // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 101, no. 21. — P. 210601.
291. Kutner R., Masoliver J. The continuous time random walk, still trendy: fifty-year history, state of art and outlook // Eur. Phys. J. B. — 2017. — Vol. 90, no. 3. — P. 50.
292. Brockmann D., Hufnagel L., Geisel T. The Scaling Laws of Human Travel // Nature. — 2006. — Vol. 439. — P. 462–465.
293. Modelling the scaling properties of human mobility / C. Song, T. Koren, P. Wang, A.-L. Barabasi // Nature Phys. — 2010. — Vol. 6. — P. 818–823.
294. Scalas E., Gorenflo R., Mainardi F. Fractional calculus and continuous-time finance // Phys. A. — 2000. — Vol. 284, no. 1. — P. 376 – 384.
295. Masoliver J., Montero M., Weiss G. H. Continuous-time random-walk model for financial distributions // Phys. Rev. E. — 2003. — Vol. 67, no. 2. — P. 021112.
296. Scalas E. The application of continuous-time random walks in finance and economics // Phys. A. — 2006. — Vol. 362, no. 2. — P. 225 – 239.
297. The CTRW in finance: Direct and inverse problems with some generalizations and extensions / J. Masoliver, M. Montero, J. Perello, G. H. Weiss // Phys. A. — 2007. — Vol. 379, no. 1. — P. 151–167.

298. Helmstetter A., Sornette D. Diffusion of epicenters of earthquake aftershocks, Omori's law, and generalized continuous-time random walk models // Phys. Rev. E. — 2002. — Vol. 66, no. 6. — P. 061104.
299. Non-Poisson distribution of the time distances between two consecutive clusters of earthquakes / L. Palatella, P. Allegrini, P. Grigolini et al. // Phys. A. — 2004. — Vol. 338, no. 1. — P. 201 – 205.
300. Corral Á. Universal Earthquake-Occurrence Jumps, Correlations with Time, and Anomalous Diffusion // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 97, no. 17. — P. 178501.
301. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular Variation. — Cambridge : Cambridge University Press, 1987.
302. Seneta E. Regularly Varying Functions. — Berlin, Heidelberg : Springer, 1976. — P. 1–52.
303. Hughes B. D. Random Walks and Random Environments, Vol. II: Random Environments. — Oxford : Clarendon Press, 1995.
304. Widder D. V. The Laplace Transform. — Princeton : Princeton University Press, 1946.
305. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды, Том 1, 2-е изд. — Москва, : ФИЗМАТЛИТ, 2002.
306. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований, Том 1. — Москва : Наука, 1969.
307. Kharchenko D. O. Scaling laws in stochastic systems with anomalous diffusion // Fluctuation Noise Lett. — 2002. — Vol. 02, no. 04. — P. L273–L278.
308. Debnath L., Bhatta D. Integral Transforms and their Applications. — 2nd edition. — New York : Chapman & Hall/CRC Press, 2007.
309. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, Том 1, Гипергеометрическая функция, функции Лежандра, 2-е изд. — Москва : Наука, 1973.
310. Paris R. B., Kaminski D. Asymptotics and Mellin-Barnes Integrals. — Cambridge : Cambridge University Press, 2001.

311. Mathai A. M., Saxena R. K., Haubold H. J. *The H-Function: Theory and Applications.* — New York : Springer, 2010.
312. Mainardi F., Luchko Yu., Pagnini G. The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation // *Fract. Calc. Appl. Anal.* — Vol. 4, no. 2. — P. 153–192.
313. Haubold H., Mathai A., Saxena R. Mittag-Leffler Functions and Their Applications // *J. Appl. Math.* — 2009. — Vol. 2011.
314. Mittag-Leffler Function, Related Topics and Applications / S. Rogosin, R. Gorenflo, A. Kilbas, F. Mainardi. — Berlin : Springer-Verlag, 2014.
315. Ablowitz M. J., Fokas A. S. *Complex Variables: Introduction and Applications.* — Cambridge : Cambridge University Press, 2003.
316. Dwight H. B. *Tables of Integrals and Other Mathematical Data.* — 4th edition. — New York : Macmillan, 1961.
317. Dispersion of particles in an infinite-horizon Lorentz gas / L. Zarfaty, A. Peletskyi, I. Fouxon et al. // *Phys. Rev. E.* — 2018. — Vol. 98, no. 1. — P. 010101.
318. Whittaker E. T., Watson G. N. *Course of Modern Analysis.* — Cambridge : Cambridge University Press, 1927.
319. Podlubny I. *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications.* — San Diego : Academic Press, 1999.
320. Devroye L. *Non-Uniform Random Variate Generation.* — New York : Springer-Verlag, 1986.
321. Cowan B. *Nuclear Magnetic Resonance and Relaxation.* — Cambridge : Cambridge University Press, 2005.
322. Suhl H. *Relaxation Processes in Micromagnetics.* — Oxford : Oxford University Press, 2007.
323. Bertotti G., Mayergoyz I., Serpico C. *Nonlinear Magnetization Dynamics in Nanosystems.* — Oxford : Elsevier, 2009.
324. Bertotti G., Mayergoyz I., Serpico C. *Dielectric Phenomena in Solids.* — San

- Diego : Elsevier Academic Press, 2004.
325. Boyd R. H., Smith G. D. *Polymer Dynamics and Relaxation*. — Orlando : Cambridge University Press, 2007.
326. Dormann J. L., Fiorani D., Tronc E. *Magnetic Relaxation in Fine-Particle Systems* // *Adv. Chem. Phys.* — John Wiley & Sons, Ltd, 2007. — P. 283–494.
327. Coffey W. T., Kalmykov Yu. P. Thermal fluctuations of magnetic nanoparticles: Fifty years after Brown // *J. Appl. Phys.* — 2012. — Vol. 112, no. 12. — P. 121301.
328. Denisov S. I., Trohidou K. N. Fluctuation theory of magnetic relaxation for two-dimensional ensembles of dipolar interacting nanoparticles // *Phys. Rev. B*. — 2001. — Vol. 64, no. 18. — P. 184433.
329. Denisov S. I., Lyutyy T. V., Trohidou K. N. Magnetic relaxation in finite two-dimensional nanoparticle ensembles // *Phys. Rev. B*. — 2003. — Vol. 67, no. 1. — P. 014411.
330. Déjardin P.-M. Magnetic relaxation of a system of superparamagnetic particles weakly coupled by dipole-dipole interactions // *J. Appl. Phys.* — 2011. — Vol. 110, no. 11. — P. 113921.
331. Dynamical and thermal effects in nanoparticle systems driven by a rotating magnetic field / S. I. Denisov, T. V. Lyutyy, P. Hänggi, K. N. Trohidou // *Phys. Rev. B*. — 2006. — Vol. 74, no. 10. — P. 104406.
332. Rapidly driven nanoparticles: Mean first-passage times and relaxation of the magnetic moment / S. I. Denisov, K. Sakmann, P. Talkner, P. Hänggi // *Phys. Rev. B*. — 2007. — Vol. 75, no. 18. — P. 184432.
333. Cox D. R. *Renewal Theory*. — London : Methuen and Co., 1967.
334. Smith W. L. *Renewal Theory and its Ramifications* // *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*. — 1958. — Vol. 20, no. 2. — P. 243–284.
335. Analytically solvable model of a driven system with quenched dichotomous disorder / S. I. Denisov, M. Kostur, E. S. Denisova, P. Hänggi // *Phys. Rev. E*. — 2007. — Vol. 75, no. 6. — P. 061123.
336. Arrival time distribution for a driven system containing quenched dichotomous

- disorder / S. I. Denisov, M. Kostur, E. S. Denisova, P. Hänggi // Phys. Rev. E. — 2007. — Vol. 76, no. 3. — P. 031101.
337. Polyanin A. D. and. Manzhirov A. V. Handbook of Integral Equations. — 2nd edition. — London : Chapman & Hall/CRC Press, 2008.
338. Atkinson K. E. The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind. — Cambridge : Cambridge University Press, 1997.
339. Delves L. M. Computational Methods for Integral Equations. — Cambridge : Cambridge University Press, 1985.
340. Lutz E. Fractional Langevin equation // Phys. Rev. E. — 2001. — Vol. 64, no. 5. — P. 051106.
341. Jeon J. H., Metzler R. Inequivalence of time and ensemble averages in ergodic systems: Exponential versus power-law relaxation in confinement // Phys. Rev. E. — 2012. — Vol. 85, no. 2. — P. 021147.
342. Cang H., Novikov V. N., Fayer M. D. Logarithmic decay of the orientational correlation function in supercooled liquids on the Ps to Ns time scale // J. Chem. Phys. — 2003. — Vol. 118, no. 6. — P. 2800–2807.
343. Edelstein A. L., Agmon N. Brownian dynamics simulations of reversible reactions in one dimension // J. Chem. Phys. — 1993. — Vol. 99, no. 7. — P. 5396–5404.
344. Experimental determination of the long-time behavior in reversible binary chemical reactions / D. Huppert, S. Y. Goldberg, A. Masad, N. Agmon // Phys. Rev. Lett. — 1992. — Vol. 68, no. 26. — P. 3932–3935.
345. Pomeau Y. Some asymptotic estimates in the random parking problem // J. Phys. A: Math. Gen. — 1980. — Vol. 13, no. 6. — P. L193–L196.
346. Feder J. Random sequential adsorption // J. Theor. Biol. — 1980. — Vol. 87, no. 2. — P. 237 – 254.
347. Swendsen R. H. Dynamics of random sequential adsorption // Phys. Rev. A. — 1981. — Vol. 24, no. 1. — P. 504–508.
348. From car parking to protein adsorption: an overview of sequential adsorption processes / J. Talbot, G. Tarjus, P. R. Van Tassel, P. Viot // Colloids

- and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects. — 2000. — Vol. 165, no. 1. — P. 287 – 324.
349. Bartelt M. C., Privman V. Kinetics of irreversible monolayer and multilayer adsorption // Int. J. Mod. Phys. B. — 1991. — Vol. 05, no. 18. — P. 2883–2907.
350. Cadilhe A., Araújo N. A. M., Privman V. Random sequential adsorption: from continuum to lattice and pre-patterned substrates // J. Phys. Condens. Matter. — 2007. — Vol. 19, no. 6. — P. 065124.
351. Rényi A. On a one-dimensional problem concerning space-filling // Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. — 1958. — Vol. 109, no. 3. — P. 109–127.
352. Rényi A. Car parking problem // Sel. Trans. Math. Stat. Prob. — 1963. — Vol. 205, no. 4.
353. Mainardi F. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena // Chaos, Solitons & Fractals. — 1996. — Vol. 7, no. 9. — P. 1461 – 1477.
354. Davidson D. W., Cole R. H. Dielectric Relaxation in Glycerol, Propylene Glycol, and n-Propanol // J. Chem. Phys. — 1951. — Vol. 19, no. 12. — P. 1484–1490.
355. Havriliak S., Negami S. A complex plane analysis of α -dispersions in some polymer systems // J. Polym. Sci., C Polym. Symp. — 1966. — Vol. 14, no. 1. — P. 99–117.
356. Havriliak S., Negami S. A complex plane representation of dielectric and mechanical relaxation processes in some polymers // Polymer. — 1967. — Vol. 8. — P. 161 – 210.
357. Stanislavsky A., Weron K., Weron A. Anomalous diffusion with transient subordinators: A link to compound relaxation laws // J. Chem. Phys. — 2014. — Vol. 140, no. 5. — P. 054113.
358. Stanislavsky A., Weron K., Weron A. Anomalous diffusion approach to non-exponential relaxation in complex physical systems // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. — 2015. — Vol. 24, no. 1. — P. 117 – 126.
359. Schilling R., Song R. end Vondraček Z. Bernstein Functions. — Berlin : De Gruyter, 2010.

360. Johnson W. The curious history of Faà di Bruno's formula // Amer. Math. Monthly. — 2002. — Vol. 109. — P. 217–234.
361. Ross S. M. Applied Probability Models with Optimization Applications. — New York : Dover, 1970.
362. Aste T., Di Matteo T. Emergence of Gamma distributions in granular materials and packing models // Phys. Rev. E. — 2008. — Vol. 77, no. 2. — P. 021309.
363. Patriarca M., Chakraborti A., Kaski K. Statistical model with a standard Γ distribution // Phys. Rev. E. — 2004. — Vol. 70, no. 1. — P. 016104.
364. Duarte Queirós S. M. On the emergence of a generalised Gamma distribution. Application to traded volume in financial markets // Europhys. Lett. — 2005. — Vol. 71, no. 3. — P. 339–345.
365. Di Crescenzo A. On random motions with velocities alternating at Erlang-distributed random times // Adv. Appl. Prob. — 2001. — Vol. 33, no. 3. — P. 690–701.
366. Wilk G., Włodarczyk Z. Interpretation of the Nonextensivity Parameter q in Some Applications of Tsallis Statistics and Lévy Distributions // Phys. Rev. Lett. — 2000. — Vol. 84, no. 13. — P. 2770–2773.
367. Non-exponential relaxation for anomalous diffusion / M. H. Vainstein, I. V. L. Costa, I. V. L. Morgado, F. A. Oliveira // Europhys. Lett. — 2006. — Vol. 73, no. 5. — P. 726–732.
368. Anomalous Diffusion: A Basic Mechanism for the Evolution of Inhomogeneous Systems / F. A. Oliveira, Rogelma M. S. Ferreira, L. C. Lapas, M. H. Vainstein // Front. Phys. — 2019. — Vol. 7. — P. 18.
369. Anomalous law of cooling / L. C. Lapas, R. M. S. Ferreira, J. M. Rubi, F. A. Oliveira // J. Chem. Phys. — 2015. — Vol. 142, no. 10. — P. 104106.
370. Kozubowski T. J., Rachev S. T. Univariate Geometric Stable Laws // J. Comput. Anal. Appl. — 1999. — Vol. 1, no. 2. — P. 177–217.
371. Fulger D., Scalas E., Germano G. Monte Carlo simulation of uncoupled continuous-time random walks yielding a stochastic solution of the space-time fractional diffusion equation // Phys. Rev. E. — 2008. — Vol. 77, no. 2. —

P. 021122.

372. Pollard H. The representation of e^{-x^λ} as a Laplace integral // Bull. Amer. Math. Soc. — 1946. — Vol. 52. — P. 908–910.
373. Mikusiński J. On the function whose Laplace transform is e^{-x^α} // Studia Math. — 1959. — Vol. 18. — P. 191–198.
374. Penson K. A., Górska K. Exact and Explicit Probability Densities for One-Sided Lévy Stable Distributions // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 105, no. 21. — P. 210604.
375. Chambers J. M., Mallows C. L., Stuck B. W. A Method for Simulating Stable Random Variables // Journal of the American Statistical Association. — 1976. — Vol. 71, no. 354. — P. 340–344.
376. Beghin L., Nieddu L., Orsingher E. Probabilistic analysis of the telegrapher's process with drift by means of relativistic transformations // J. Appl. Math. Stoch. Anal. — 2001. — Vol. 14, no. 11. — P. 11–25.
377. Abramowitz M., Stegun A. I. Handbook of Mathematical Functions. — New York : Dover, 1965.
378. Makoto Ya. Unimodality of Infinitely Divisible Distribution Functions of Class L // Ann. Probab. — 1978. — Vol. 6, no. 4. — P. 523–531.
379. Федорюк М. В. Метод перевала. — Москва : Наука, 1977.
380. Bender C. M., Orszag S. A. Advanced mathematical methods for scientists and engineers I. Asymptotic methods and perturbation theory. — New York : Springer-Verlag, 1999.
381. Oberhettinger F. Fourier Transforms of Distributions and Their Inverses. — New York : Academic Press, 1973.

ДОДАТОК А

Знаходження асимптотики $P(x, t)$ для випадку $l_1 = 0, \alpha = 2$ при $|x| \rightarrow \infty$

Врахувавши наступний розклад на прості дроби

$$\frac{1}{(1 + \xi^2)(1 + b^2\xi^4)} = \frac{1}{1 + b^2} \frac{1}{1 + \xi^2} + \frac{b^2}{1 + b^2} \frac{1 - \xi^2}{1 + b^2\xi^4}, \quad (\text{A.1})$$

після деяких перетворень вираз (3.84) можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} P(x, t) \simeq & \frac{\beta_t}{\pi(1 + b^2)} \widehat{A} I_1(x, t) + \frac{\beta_t b^2}{\pi(1 + b^2)} \widehat{A} I_2(x, t) \\ & + \frac{\beta_t^3 \tilde{u} \ln(\beta_t|x|)}{\pi V(t)} I_3(x, t) + \frac{\beta_t^3 \tilde{u}}{\pi V(t)} I_4(x, t). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

В останній формулі ми ввели інтеграли

$$I_1(x, t) = \int_0^\infty d\xi e^{i\beta_t|x|\xi} \frac{1}{1 + \xi^2}, \quad (\text{A.3})$$

$$I_2(x, t) = \int_0^\infty d\xi e^{i\beta_t|x|\xi} \frac{1 - \xi^2}{1 + b^2\xi^4}, \quad (\text{A.4})$$

$$I_3(x, t) = \int_0^\infty d\xi \cos(\beta_t x \xi) e^{-\xi^2} \xi^2, \quad (\text{A.5})$$

$$I_4(x, t) = \int_0^\infty d\xi \cos(\beta_t x \xi) e^{-\xi^2} \xi^2 \ln \xi \quad (\text{A.6})$$

та оператор

$$\widehat{A} = \operatorname{Re} + b \operatorname{sgn}(x) \frac{\partial^2}{\partial(\beta_t|x|)^2} \operatorname{Im}. \quad (\text{A.7})$$

Далі ми приведемо зазначені інтеграли до зручного вигляду, що дозволить аналітично отримати необхідну асимптотику $P(x, t)$.

Інтеграл (A.3). Розглянемо функцію $f_1(z) = e^{i\beta_t|x|z}/(1+z^2)$ в комплексній площині $z = \xi + i\eta$. Вона має прості полюси в точках $z = \pm i$. Інтегруючи її по контуру, що складається з додатної частини дійсної вісі ξ , дуги кола з радіусом $R \rightarrow \infty$ та додатної частини уявної вісі η , обходячи при цьому полюс $z = i$, записуємо цей інтеграл у вигляді

$$I_1(x, t) = \frac{\pi}{2} e^{-\beta_t|x|} + i \int_0^\infty d\eta e^{-\beta_t|x|\eta} \frac{1}{1-\eta^2}. \quad (\text{A.8})$$

Інтеграл (A.4). Розглянемо функцію $f_2(z) = e^{i\beta_t|x|z}(1 - z^2)/(1 + b^2z^4)$. У першому квадранті площини z вона має простий полюс в точці $e^{i\pi/4}/\sqrt{|b|}$. Інтегруючи її по такому ж контуру, як і в попередньому випадку, отримуємо

$$I_2(x, t) = 2\pi\varrho \exp \left\{ -\frac{(1-i)\beta_t|x|}{\sqrt{2|b|}} \right\} + i \int_0^\infty d\eta e^{-\beta_t|x|\eta} \frac{1+\eta^2}{1+b^2\eta^4}, \quad (\text{A.9})$$

де

$$\varrho = \varrho(x) = \frac{1}{|b|} - 2\sqrt{2/|b|} - 2\sqrt{2|b|} + i \left(2\sqrt{2/|b|} + 1 - 2\sqrt{2|b|} \right) \quad (\text{A.10})$$

Інтеграл (A.5). Даний інтеграл є табличним і дається формулою (див., наприклад, [305])

$$I_3(x, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - \frac{(\beta_t x)^2}{2} \right] e^{-(\beta_t x)^2/4}. \quad (\text{A.11})$$

Інтеграл (A.6). Прийнявши до уваги, що має місце співвідношення $\xi^2 \ln \xi = \partial \xi^\lambda / \partial \lambda |_{\lambda=2}$, і, знову ж таки, врахувавши табличні результати [305],

записуємо формулу (A.6) у вигляді

$$\begin{aligned}
 I_4(x, t) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^\infty d\xi \cos(\beta_t x \xi) e^{-\xi^2} \xi^\lambda \Big|_{\lambda=2} \\
 &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) {}_1F_1\left[\frac{\lambda+1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{(\beta_t x)^2}{4}\right] \right\} \Big|_{\lambda=2} \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} (2 - \ln 4 - \gamma) \left[1 - \frac{(\beta_t x)^2}{2} \right] e^{-(\beta_t x)^2/4} \\
 &\quad + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}} {}_1F_1\left[\tilde{\lambda}; \frac{1}{2}; -\frac{(\beta_t x)^2}{4}\right] \Big|_{\tilde{\lambda}=3/2}. \tag{A.12}
 \end{aligned}$$

В останньому виразі ${}_1F_1[a_1; a_2; z]$ – це гіпергеометрична функція Куммера.

Після цих обчислень ми отримали результати, що дозволяють описати поведінку $P(x, t)$ при $|x| \gg O[1/a(t)]$. Більш того, для центральної області $|x| \propto O[1/a(t)]$, ввівши в рівнянні (A.2) масштабовану координату $y = a(t)x$ (з відповідною масштабуючою функцією $a(t)$, що дається виразом (2.56)), можна переконатися, що асимптотична у часі поведінка ($t \rightarrow \infty$) цього виразу прямує до граничного розподілу (2.57).

Вираз (A.2) є доволі складним, але нас цікавить в першу чергу поведінка хвостів $P(x, t)$ при $|x| \rightarrow \infty$. Застосовуючи до інтегралів в першому рядку виразу (A.2) (вони даються формулами (A.3) і (A.4)) оператор \widehat{A} (формула (A.7)) та лему Ватсона [315], після нехтування членами меншого порядку знаходимо

$$\frac{\beta_t}{\pi(1+b^2)} \widehat{A}I_1(x, t) + \frac{\beta_t b^2}{\pi(1+b^2)} \widehat{A}I_2(x, t) \simeq \frac{2b \operatorname{sgn}(x)}{\pi \beta_t^2} \frac{1}{|x|^3} \tag{A.13}$$

при $|x| \rightarrow \infty$. У другому рядку виразу (A.2) ми скористаємося фактами, що для гіпергеометричної функції Куммера має місце асимптотика ${}_1F_1[a_1; a_2; z] \sim \frac{\Gamma(a_2)}{\Gamma(a_2-a_1)} (-z)^{-a_1}$ при $|z| \rightarrow \infty$ та $\operatorname{Re} z < 0$, а для гамма-функції $\Gamma(\zeta)$ в околі полюсу $\zeta = -1$ справедливо співвідношення $\Gamma(\zeta) \sim -1/(1+\zeta)$ (див., наприклад, [377]). Тоді, виходячи із сказаного, одержуємо

$$\frac{\beta_t^3 \widetilde{u} \ln(\beta_t |x|)}{\pi V(t)} I_3(x, t) + \frac{\beta_t^3 \widetilde{u}}{\pi V(t)} I_4(x, t) \simeq \frac{2\widetilde{u}}{V(t)} \frac{1}{|x|^3}. \tag{A.14}$$

Нарешті, прийнявши до уваги визначення (3.85) і (3.86), із формул (A.13) та (A.14) знаходимо

$$P(x, t) \simeq \frac{\tilde{u}[2 + \operatorname{sgn}(x)\epsilon]}{V(t)} \frac{1}{|x|^3} \quad (\text{A.15})$$

при $|x| \rightarrow \infty$.

ДОДАТОК Б

Альтернативне виведення релаксаційного рівняння

Розглянемо спочатку випадок несиметричної релаксації. Нагадаємо, що права частина формули (4.1) – це усереднення (математичне очікування) процесу $f(t)$ по всім можливим траекторіям. Ці траекторії характеризуються тим, що починаються в момент $t_0 = 0$ у точці $f(0) = 1$ та закінчуються в момент часу t в точці $f(t) = 1$ для парного числа стрибків процесу, або в точці $f(t) = -1$ для непарного. Стрибки здійснюються у випадкові моменти τ_n ($n = \overline{1, \infty}$), і якщо стрибок відсутній ($n = 0$), то очевидно, що $f(t) = 1$. Таким чином, усереднення процесу $f(t)$ по всім реалізаціям можна представити як суму усереднень по реалізаціям, для яких $n = 0$, $n = 1$ і $n \geq 2$. Отже, закон релаксації $\mu(t)$ можна записати у вигляді

$$\mu(t) = \langle f(t) |_{\tau_1 > t} \rangle + \langle f(t) |_{\tau_1 + \tau_2 > t} \rangle + \langle f(t) |_{\tau_1 + \tau_2 \leq t} \rangle, \quad (\text{Б.1})$$

де величина $\langle f(t) |_A \rangle$ показує математичне очікування процесу $f(t)$ за умови, що подія A відбулася.

Виходячи із сказаного, безпосередньо випливає, що

$$\langle f(t) |_{\tau_1 > t} \rangle = W^{(0)}(t) = \int_t^{\infty} d\tau_1 p^+(\tau_1) \quad (\text{Б.2})$$

та

$$\langle f(t) |_{\tau_1 + \tau_2 > t} \rangle = -W^{(1)}(t) = - \int_0^t d\tau_1 p^+(\tau_1) \int_{t-\tau_1}^{\infty} d\tau_2 p^-(\tau_2). \quad (\text{Б.3})$$

Далі при $n \geq 2$ розіб'ємо часовий інтервал $(0, t]$ на частини $(0, \tau]$ і $(\tau, t]$, де $\tau = \tau_1 + \tau_2$ (рис. 4.1 (a)). Тоді процес $f(t)$, починаючи з моменту часу $\tau = t$, можна розглядати як новий процес $f(t)|_{t_0=\tau}$, для якого точка старту зсунута на τ вправо по осі t , початкове значення становить $f(t_0)|_{t_0=\tau} = 1$, а тривалість блукань дорівнює $t - \tau$. Статистичні властивості цього процесу такі

ж, як і для процесу $f(t - \tau)$, оскільки вони задаються лише його значенням на старті, тривалістю блукань і розподілами часів перебування у верхньому та нижньому положеннях. Це випливає з того, що, очевидно, процеси $f(t)|_{t_0=\tau}$ та $f(t - \tau)$ характеризуються однаковими розподілами часів очікування. Звідси слідує, що всі статистичні характеристики процесів $f(t)|_{t_0=\tau}$ і $f(t - \tau)$ рівні, включаючи рівність їх середніх значень

$$\langle f(t)|_{t_0=\tau} \rangle = \langle f(t - \tau) \rangle. \quad (\text{Б.4})$$

Підкреслимо що, звісно, самі процеси $f(t)|_{t_0=\tau}$ і $f(t - \tau)$ не є тотожними, з тією лише різницею, що час старту зміщено. Однак, приймаючи у загальному випадку різні значення і маючи різну тривалість часів τ_n , ці процеси еквівалентні у статистичному сенсі.

Для фіксованого τ значення $f(t)$ при умові $n \geq 2$ (позначимо цю величину $f(t)|_{\tau_1+\tau_2=\tau}$) дорівнює значенню функції $f(t)|_{t_0=\tau}$. Водночас середнє значення процесу $f(t)|_{\tau_1+\tau_2=\tau}$ по реалізаціям дорівнює середньому значенню $f(t)|_{t_0=\tau}$, помноженому на ймовірність того, що другий стрибок функції $f(t)$ відбувся в інтервалі $(\tau, \tau + d\tau)$ при $d\tau \rightarrow 0$. Приймемо до уваги, що розподіли випадкових величин τ_1 і τ_2 становлять $p^+(\tau_1)$ і $p^-(\tau_2)$ відповідно. Значить, враховуючи, що густина ймовірності випадкової величини $\tau_1 + \tau_2 = \tau$ дорівнює $\int_0^\tau d\tau' p^+(\tau') p^-(\tau - \tau')$ [29], отримуємо

$$\langle f(t)|_{\tau_1+\tau_2=\tau} \rangle = d\tau \int_0^\tau d\tau' p^+(\tau') p^-(\tau - \tau') \langle f(t)|_{t_0=\tau} \rangle. \quad (\text{Б.5})$$

Ця формула із урахуванням рівності (Б.4) приймає вигляд

$$\langle f(t)|_{\tau_1+\tau_2=\tau} \rangle = d\tau \int_0^\tau d\tau' p^+(\tau') p^-(\tau - \tau') \langle f(t - \tau) \rangle. \quad (\text{Б.6})$$

Величина $\langle f(t)|_{\tau_1+\tau_2 \leq t} \rangle$ є середнім значенням процесу $f(t)$ при $n \geq 2$ для всіх значень змінної τ ($\tau \in (0, t]$). Таким чином, вона задається інтегруванням

$\langle f(t) |_{\tau_1+\tau_2=\tau} \rangle$ відносно всіх можливих τ , а значить

$$\langle f(t) |_{\tau_1+\tau_2 \leq t} \rangle = \int_0^t d\tau \langle f(t-\tau) \rangle \int_0^\tau d\tau' p^+(\tau') p^-(\tau-\tau'). \quad (\text{Б.7})$$

Отже, приймаючи до уваги той факт, що $\langle f(t-\tau) \rangle = \mu(t-\tau)$ (визначення (4.1)), отримуємо

$$\langle f(t) |_{\tau_1+\tau_2 \leq t} \rangle = \int_0^t d\tau \mu(t-\tau) \int_0^\tau d\tau' p^+(\tau') p^-(\tau-\tau'). \quad (\text{Б.8})$$

I, насамкінечь, підставляючи формули (Б.2), (Б.3) і (Б.8) в рівняння (Б.1), а також враховуючи, що для відповідних функцій $\psi(t)$ і $\phi(t)$ виконується рівність їх згорток, $\int_0^t d\tau \psi(\tau) \phi(t-\tau) = \int_0^t d\tau \psi(t-\tau) \phi(\tau)$, приходимо до інтегрального рівняння (4.17).

Отримаємо далі інтегральне рівняння (4.19) для симетричної релаксації. Метод виведення буде аналогічним несиметричному випадку, але з різницею, що усереднення процесу $f(t)$ по всіх реалізаціях запишемо як суму усереднень по реалізаціях, для яких $n = 0$ і $n \geq 1$. Значить релаксаційну функція $\mu(t)$ представимо у вигляді

$$\mu(t) = \langle f(t) |_{\tau_1 > t} \rangle + \langle f(t) |_{\tau_1 \leq t} \rangle, \quad (\text{Б.9})$$

де

$$\langle f(t) |_{\tau_1 > t} \rangle = W^{(0)}(t) = \int_t^\infty d\tau_1 p(\tau_1). \quad (\text{Б.10})$$

Для обчислення $\langle f(t) |_{\tau_1 \leq t} \rangle$ розіб'ємо інтервал часу $(0, t]$ проміжною точкою $\tau = \tau_1$ на частини $(0, \tau]$ і $(\tau, t]$ (рис. 4.1, (b)). Починаючи з моменту часу $t = \tau$ процес $f(t)$ можна представити як новий процес $f(t)|_{t_0=\tau}$ з початковою умовою $f(t_0)|_{t_0=\tau} = -1$. Отже, однакові статистичні властивості будуть мати процеси $f(t-\tau)$ і $-f(t)|_{t_0=\tau}$. Повторюючи попереднє доведення, запишемо

середнє значення $f(t)$ при умові, що перший стрибок був у інтервалі $(\tau, \tau + d\tau)$

$$\langle f(t) |_{\tau_1=\tau} \rangle = d\tau p(\tau) \langle f(t) |_{t_0=\tau} \rangle \quad (\text{Б.11})$$

або (що рівноцінно)

$$\langle f(t) |_{\tau_1=\tau} \rangle = -d\tau p(\tau) \langle f(t - \tau) \rangle. \quad (\text{Б.12})$$

Середнє значення $f(t)$ при умові, що за час t відбувся хоча б один стрибок процесу, дається виразом

$$\langle f(t) |_{\tau_1 \leq t} \rangle = - \int_0^t d\tau \langle f(t - \tau) \rangle p(\tau). \quad (\text{Б.13})$$

Звідси, приймаючи до уваги визначення (4.1), знаходимо

$$\langle f(t) |_{\tau_1 \leq t} \rangle = - \int_0^t d\tau \mu(t - \tau) p(\tau). \quad (\text{Б.14})$$

У підсумку, підставляючи вирази (Б.10), (Б.14) в (Б.9) та враховуючи властивість згортки функцій, приходимо до інтегрального рівняння (4.19).

ДОДАТОК В

Знаходження закону релаксації Міттаг-Леффлера

Для знаходження оберненого перетворення Лапласа від (5.24) і (5.25) введемо функцію

$$g_s = \frac{s^{a-1}}{s^a + s^b + 1}, \quad (\text{B.1})$$

де параметри $\{a, b\} \in (0, 1]$ і $a \neq b$. Зауважимо, що функція g_s в комплексній площині має розгалуження в точках $s = 0$ і $s = \infty$, а тому є багатозначною. Це випливає із властивостей функції s^ν [315], де ν – будь-яке комплексне число. Область однозначності для s^ν (а тому і для g_s) можна, наприклад, виділити умовою $|\arg(s)| < \pi$. Покажемо, що функція (B.1) в даній області є аналітичною, тобто не буде мати полюсів. Для цього нам треба показати, що функція

$$w_s = s^a + s^b + 1 \quad (\text{B.2})$$

не має нулів при $|\arg(s)| < \pi$.

Використовуючи представлення $s^a = |s|^a e^{ia \arg(s)}$ та $s^b = |s|^b e^{ib \arg(s)}$ (тут ми врахували, що беремо головні гілки даних функцій), знаходимо наступний вигляд функції w_s

$$\begin{aligned} w_s = & |s|^a \cos[a \arg(s)] + |s|^b \cos[b \arg(s)] + 1 \\ & + i(|s|^a \sin[a \arg(s)] + |s|^b \sin[b \arg(s)]). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Оскільки $|\arg(s)| < \pi$ і $\{a, b\} \in (0, 1]$, то $\{a, b\} |\arg(s)| < \pi$. Таким чином, при $\arg(s) \in (0, \pi)$ для уявної частини w_s маємо $\operatorname{Im} w_s > 0$, а при $\arg(s) \in (-\pi, 0)$ отримуємо $\operatorname{Im} w_s < 0$. Якщо ж $\arg(s) = 0$, то дійсна частина w_s задовольняє нерівність $\operatorname{Re} w_s = |s|^a + |s|^b + 1 > 1$. Отже, при $|\arg(s)| < \pi$ функція $w_s \neq 0$, а значить g_s аналітична в зазначеній області.

Розглянемо в комплексній площині $s = u + iv$ замкнутий контур C , який зображене на рисунку B.1. В області, що обмежена даним контуром, функція g_s є аналітичною, а тому за теоремою Коші

$$\oint_C ds g_s = 0. \quad (\text{B.4})$$

Контур C (див. рис. B.1) розкладаємо на складові частини $C = C_{Br} + C_R^+ +$

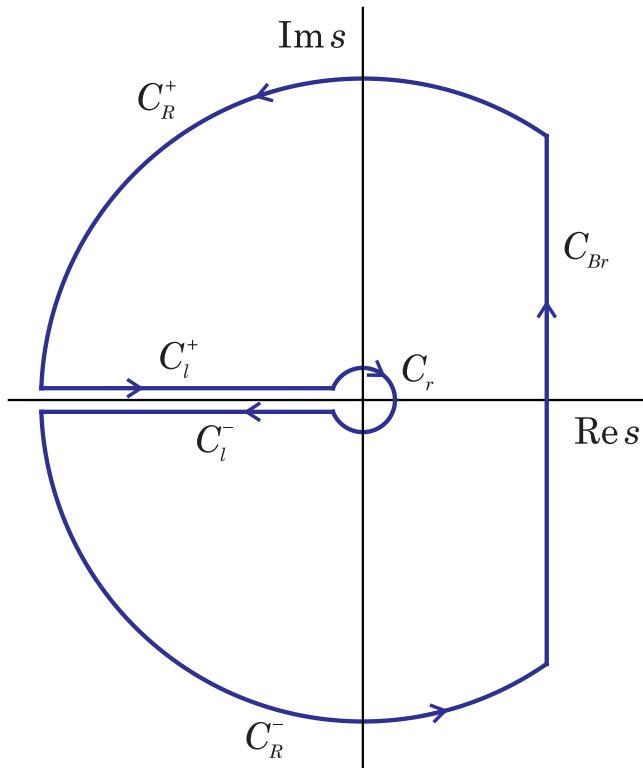


Рис. B.1. Контур інтегрування для функції g_s (формула (B.1)).

$C_l^+ + C_r + C_l^- + C_R^-$, де C_{Br} – вертикальна пряма з $\operatorname{Re} s > 0$ (контур Бромвіча), C_R^\pm – дуги кола з центром $s = 0$ і радіусом R , C_r – дуга кола з центром $s = 0$ і радіусом r , C_l^\pm – відповідні горизонтальні прямі з $\operatorname{Im} s = \pm\varepsilon$. Якщо $R \rightarrow \infty$, то за лемою Жордана можна показати, що інтеграл $\int_{C_R^\pm} ds g_s \rightarrow 0$. Також неважко показати, що $\int_{C_r} ds g_s \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. Далі використаємо представлення $s = \rho e^{i\arg(s)}$, де змінна $\rho = |s|$, тоді (враховуючи, що $\varepsilon \rightarrow 0$) на прямій C_l^+ отримуємо $s = \rho_1 e^{i\pi}$, $\rho_1 \in (\infty, 0]$; а на прямій C_l^- маємо $s = \rho_2 e^{-i\pi}$,

$\rho_1 \in [0, \infty)$. Отже, так як $(2\pi i)^{-1} \int_{C_{B_r}} ds g_s \rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{g_s\}$, то знаходимо

$$g(t) = \int_0^\infty \frac{dx e^{-xt} [\sin(\pi a)x^{a-1} - \sin[\pi(b-a)]x^{a+b-1}]/\pi}{1 + 2\cos(\pi a)x^a + 2\cos(\pi b)x^b + 2\cos[\pi(b-a)]x^{a+b} + x^{2a} + x^{2b}}. \quad (\text{B.5})$$

Таким чином, у випадку $\alpha < \beta$ із рівняння (5.24) слідує закон релаксації

$$\mu(t) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx e^{-xt} \times \frac{\sin[\pi(\beta - \alpha)]x^{\beta-\alpha-1} - \sin(\pi\alpha)x^{2\beta-\alpha-1}}{1 + 2\cos(\pi\alpha)x^{2\beta-\alpha} + 2\cos[\pi(\beta - \alpha)]x^{\beta-\alpha} + 2\cos(\pi\beta)x^\beta + x^{2(\beta-\alpha)} + x^{2\beta}}. \quad (\text{B.6})$$

А якщо $\beta < \alpha$, то із виразу (5.25) маємо

$$\mu(t) = -1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx e^{-xt} \times \frac{\sin[\pi(\alpha - \beta)]x^{\alpha-\beta-1} + \sin(\pi\alpha)x^{\alpha-1}}{1 + 2\cos(\pi\alpha)x^\alpha + 2\cos[\pi(\alpha - \beta)]x^{\alpha-\beta} + 2\cos(\pi\beta)x^{2\alpha-\beta} + x^{2(\alpha-\beta)} + x^{2\alpha}}. \quad (\text{B.7})$$

ДОДАТОК Г

Дослідження збіжності рядів для релаксації Міттаг-Леффлера та Леві

Релаксація Леві

Розглянемо спочатку більш простий випадок релаксації Леві. Очевидно, що по критерію Лейбніца [318] ряд (5.41) є збіжним, оскільки він знакозмінний і функція $\Phi_\alpha(n^{-1/\alpha}t) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Оцінимо тепер швидкість збіжності цього ряду, тобто поведінку $\Phi_\alpha(n^{-1/\alpha}t)$ при $n \rightarrow \infty$ і будь-яких кінцевих значеннях часу t .

Відомо [373], що при $\tau \rightarrow 0$ має місці наступна асимптотика для одностороннього розподілу Леві

$$l_\alpha(\tau) \sim K \tau^{-(2-\alpha)/(2-2\alpha)} e^{-A\tau^{-\alpha/(1-\alpha)}}, \quad (\Gamma.1)$$

де параметри

$$A = (1 - \alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}, \quad (\Gamma.2)$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 - \alpha)}} \alpha^{1/(2-2\alpha)}. \quad (\Gamma.3)$$

При виході в комплексну площину функція $l_\alpha(\tau)$ в точці $\tau = 0$ має суттєву особливість. Через це при дійсних $\tau \geq 0$ в околі точки $\tau = 0$ поведінка $l_\alpha(\tau)$ також є доволі незвичною. Наприклад, при $\alpha = 1/20$ функція $l_{1/20}(0) = 0$, але вже для екстремально малих значень аргументу $\tau \sim 10^{-26}$ виникає дуже значний пік порядку 10^{16} . При цьому даний розподіл Леві (як і усі стійкі розподіли) є унімодальним [370, 378] і при $\alpha \rightarrow 0$ точка максимуму також прямує до нуля.

Підставляючи формулі (Г.1)–(Г.3) в вираз (5.40) і враховуючи, що для неповної гамма-функції виконується співвідношення $\Gamma(z, c) = \int_z^\infty dx x^{c-1} e^{-x} \sim$

$z^{c-1}e^{-z}$ при $z \rightarrow \infty$ (це неважко показати інтегруючи частинами), знаходимо асимптотику функції розподілу односторонньої густини Леві при $t \rightarrow 0$

$$\Phi_\alpha(t) \sim \tilde{K} t^{\alpha/(2-2\alpha)} e^{-At^{-\alpha/(1-\alpha)}}, \quad (\Gamma.4)$$

де

$$\tilde{K} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\alpha)}} \alpha^{-1/(2-2\alpha)}. \quad (\Gamma.5)$$

А значить при кінцевих t і $n \rightarrow \infty$ має місце співвідношення

$$\Phi_\alpha(n^{-1/\alpha}t) \sim \tilde{K} \frac{t^{\alpha/(2-2\alpha)}}{n^{1/(2-2\alpha)}} e^{-At^{-\alpha/(1-\alpha)}n^{1/(1-\alpha)}}. \quad (\Gamma.6)$$

Таким чином, у виразі (5.41) при $n \rightarrow \infty$ члени $\Phi_\alpha(n^{-1/\alpha}t)$ дуже швидко прямують до нуля. При чому, як ми бачимо, порядок прямування до нуля буде навіть швидший, ніж експоненціальний.

Релаксація Міттаг-Леффлера

Покажемо тепер, що і для релаксації Міттаг-Леффлера ряди (5.31) і (5.34) також є швидко збіжними. При $\alpha < \beta$ із (5.31) слідує, що нам слід проаналізувати асимптотику функції

$$\mathcal{I}_n^< = t^{\alpha n} E_{\beta, \alpha n + 1}^n(-t^\beta) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{-\alpha n - 1}}{(1 + s^{-\beta})^n} \right\}, \quad (\Gamma.7)$$

а при $\alpha > \beta$ із формули (5.34) випливає потреба дослідження функції

$$\mathcal{I}_n^> = t^{(\alpha-\beta)+\beta n} E_{\alpha, \beta n + (\alpha-\beta) + 1}^n(-t^\alpha) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{-\beta n - (\alpha-\beta)-1}}{(1 + s^{-\alpha})^n} \right\} \quad (\Gamma.8)$$

для $n \rightarrow \infty$.

Отже, ми приходимо до висновку, що необхідно знайти асимптотичну по-

ведінку інтегралу

$$\mathcal{I}_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} ds \frac{e^{st}}{s^k} \frac{s^{-\alpha n}}{(1+s^{-\beta})^n} \quad (\Gamma.9)$$

за умови $n \rightarrow \infty$. При цьому у випадку $\alpha < \beta$ в результаті нам слідує покласти $k = 1$, а у випадку $\alpha > \beta$ поміняти місцями параметри α та β , а потім покласти $k = (\alpha - \beta) + 1$. Шлях інтегрування \mathcal{C} являє собою вертикальну пряму з $\operatorname{Re} s > 1$. Зауважимо, що підінтегральна функція має точку розгалуження $s = 0$ та є багатозначною. Однозначність досягається, якщо зробити розріз вздовж негативної частини дійсної вісі площини s . Також значимо, що індекс n – натуральне число, але розрахунки ми виконаємо для більш загального випадку всіх додатніх великих n .

Для знаходження асимптотики \mathcal{I}_n ми використаємо метод перевалу (див., наприклад, [379, 380]), який в англомовній літературі прийнято називати методом найшвидшого спуску (method of steepest descent). Пояснимо далі коротко суть цього методу, оскільки він не зводиться до простого використання якоїсь формули. Це пов'язано з тим, що метод перевалу складається з двох етапів: топологічного (побудова контуру для обчислення інтегралу) і аналітичного (безпосереднє обчислення інтегралу), і в загальному випадку перший топологічний етап, а занчить і все обчислення, не завжди можна виконати.

При великих значеннях параметру n величина інтегралу $\int_{\mathcal{C}} ds h(s) e^{nF(s)}$ ($h(s)$ та $F(s)$ – аналітичні функції) буде задаватися тією ділянкою інтегрування, де значення $|e^{nF(s)}| = e^{n\operatorname{Re} F(s)}$, а тому і $\operatorname{Re} F(s)$, є найбільшим у порівнянні зі значеннями на іншій частині цього контуру. При цьому інтеграл оцінюється тим краще, чим менша довжина цієї частини контуру і чим швидше падає величина $\operatorname{Re} F(s)$. У зв'язку з цим для застосування методу перевалу шлях інтегрування \mathcal{C} потрібно деформувати в найбільш зручний шлях $\tilde{\mathcal{C}}$, користуючись тим фактом, що за теоремою Коші така деформація не змінює величини інтегралу.

Оскільки функція $F(s)$ – аналітична, то із принципу максимуму модуля [315] слідує, що $\operatorname{Re} F(s)$ не може мати точок локального максимуму і мініму-

му у всій області аналітичності, а точки, в яких $F'(s) = 0$, будуть для неї точками перевалу (сідловими точками). А тому, якщо контур проходить через точку перевалу s_0 , то на цьому контурі функція $\operatorname{Re} F(s)$ буде досягати необхідний локальний екстремум саме в даній точці. В нашому випадку точка перевалу буде однією, але взагалі їх може бути і більше. Також відмітимо, що так як точка екстремуму на контурі буде однією, то факт, що вона є точкою максимуму, легко встановити, знайшовши значення $\operatorname{Re} F(s)$ на його кінцях. Контур інтегрування $\tilde{\mathcal{C}}$ задається рівнянням $\operatorname{Im} F(s) = c_0 = \operatorname{const}$, вздовж цієї лінії функція $\operatorname{Re} F(s)$ має найбільшу швидкість спадання. Після деформації початкового контуру \mathcal{C} в $\tilde{\mathcal{C}}$ асимптотику інтегралу можна безпосереднього обчислити за методом Лапласа (або у разі необхідності за лемою Ватсона). Можливість використання методу Лапласа пов'язана з тим, що інтеграл $\int_{\mathcal{C}} ds h(s)e^{nF(s)}$ трансформується в $e^{in c_0} \int_{\tilde{\mathcal{C}}} ds h(s)e^{n\operatorname{Re} F(s)}$ і ми позбуваємося від осциляцій функції $F(s)$, які зумовлені її уявною частиною. Зауважимо, що в загальному випадку побудова контуру $\tilde{\mathcal{C}}$ є нетривіальною задачею, більш того такого шляху може просто не існувати.

Перейдемо тепер до обчислення асимптотики \mathcal{I}_n . Зробимо спочатку заміну змінної інтегрування $s = nz$, тоді

$$\mathcal{I}_n = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{n^{\alpha n+k-1}} \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^k} \frac{e^{n[tz - \alpha \ln z]}}{[1 + (nz)^{-\beta}]^n}. \quad (\Gamma.10)$$

Цей вираз ми інтегруємо вздовж шляху з $|nz| > 1$, а значить можемо використати біноміальний розклад [377] $[1 + (nz)^{-\beta}]^{-n} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-n}{m} (nz)^{-\beta m}$, де $\binom{-n}{m}$ – біноміальний коефіцієнт. Підставляючи цю формулу в рівняння (Г.10) та змінюючи порядок сумування та інтегрування (ми це можемо зробити, оскільки біноміальний ряд абсолютно збіжний), отримуємо

$$\mathcal{I}_n = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{n^{\alpha n+k-1}} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-n}{m} \frac{1}{n^{\beta m}} \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^{k+\beta m}} e^{n[tz - \alpha \ln z]} \quad (\Gamma.11)$$

Із властивостей біноміального коефіцієнту слідує рівність $\binom{-n}{m} =$

$(-1)^m \binom{n-1+m}{m} = \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)}$. На основі формули Стірлінга [318, 380] при $n \rightarrow \infty$ маємо $\frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)} \sim n^m$, а тому

$$\mathcal{I}_n \sim \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{n^{\alpha n+k-1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} n^{(1-\beta)m} J_n^{(m)}, \quad (\Gamma.12)$$

де ми ввели

$$J_n^{(m)} = \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^{k+\beta m}} e^{n[tz - \alpha \ln z]}. \quad (\Gamma.13)$$

Тепер ми можемо застосувати метод перевала для обчислення значення $J_n^{(m)}$ при великих n . Із формули (Г.13) маємо $F(z) = tz - \alpha \ln z$, а тому $F'(z) = t - \alpha/z$ і сідлова точка $z_0 = \alpha/t$. Далі, поклавши $z = u + iv$, перепишемо функцію $F(z)$ у вигляді

$$F(z) = tu - \alpha \ln \sqrt{u^2 + v^2} + i [tv - \alpha \arctan(v/u)]. \quad (\Gamma.14)$$

Як вже зазначалося, крива постійного рівня для $\operatorname{Im} F(z)$ є кривою найшвидшого спуску для $\operatorname{Re} F(z)$, у нашому випадку вона задається формулою $tv - \alpha \arctan(v/u) = \text{const}$. Враховуючи, що ця лінія повинна проходити через точку перевалу $z_0 = \alpha/t$ (тобто $u_0 = \alpha/t$ та $v_0 = 0$) отримуємо, що $\text{const} = 0$ і рівняння шуканої кривої найшвидшого спуску $\tilde{\mathcal{C}}$ приймає вигляд

$$tv - \alpha \arctan(v/u) = 0. \quad (\Gamma.15)$$

Останнє рівняння має два розв'язки: $v = 0$ та $u = v \cot[(t/\alpha)v]$, необхідний нам контур задається другим рівнянням. Неважко переконатися, що точка z_0 дійсно є точкою максимуму для $e^{n\operatorname{Re} F(z)}$ вздовж лінії, що дається цим рівнянням. На рисунку зображене вигляд контуру $\tilde{\mathcal{C}}$, він проходить через точку перевалу $u_0 = \alpha/t$, перетинає вісь v в точках $\pm\pi\alpha/2t$, та прямує до $z = -\infty \pm i\pi\alpha/t$. При цьому за допомогою теореми Коші та леми Жордана можна впевнитися, що контур \mathcal{C} дійсно деформується в $\tilde{\mathcal{C}}$, не змінюючи при

цьому значення інтегралу (Г.13).

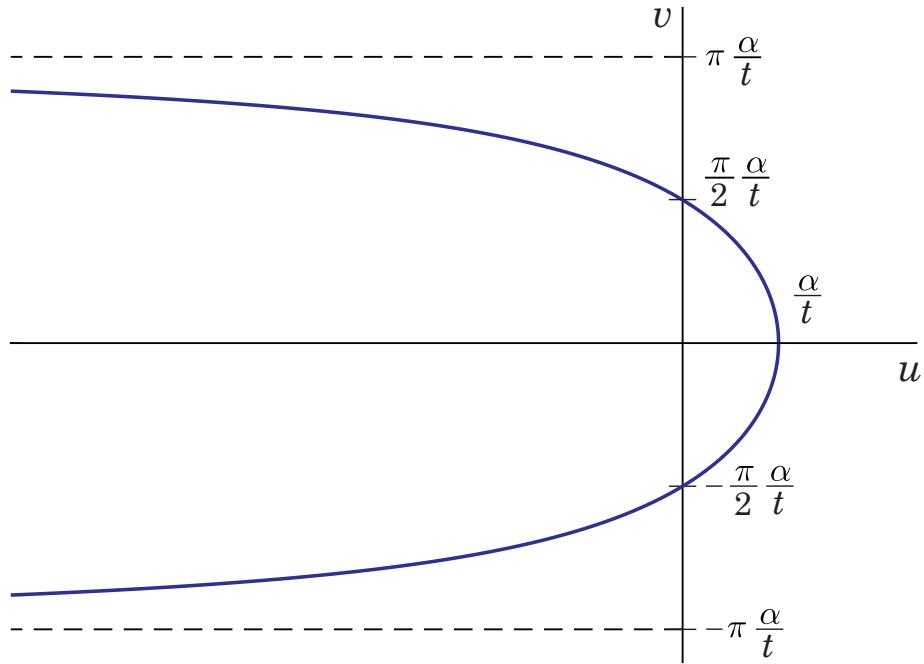


Рис. Г.1. Контур інтегрування \tilde{C} (рівняння $u = v \cot[(t/\alpha)v]$) для інтегралу (Г.9).

Далі, згідно з методом найшвидшого спуску, контур \tilde{C} ми апроксимуємо дотичною в сідловій точці, оскільки її вклад є домінуючим. Тобто інтегрування можна проводити не вздовж кривої $u = v \cot[(t/\alpha)v]$, а вздовж її дотичної $z = z_0 + iv$, де $v \in (-\infty, \infty)$. Наступним кроком є застосування до інтегралу (Г.13) методу Лапласа. А саме, функцію $F(z)$ ми замінюємо її розкладом в ряд Тейлора в околі точки z_0 : $F(z) \approx F(z_0) + F''(z_0)(z - z_0)^2/2$, а функцію $h(z) = 1/z^{k+\beta m}$ її значенням в цій точці. Отже, враховуючи, що $F(z_0) = \alpha[1 + \ln(t/\alpha)]$, $F''(z_0) = t^2/\alpha$ та інтеграл Гаусса $\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} = \sqrt{\pi}$ із формулі (Г.13) одержуємо

$$J_n^{(m)} \sim i\sqrt{2\pi} \frac{t^{k-1}}{\alpha^{k-1/2}} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta m} \frac{e^{n\alpha[1+\ln(t/\alpha)]}}{\sqrt{n}} \quad (\text{Г.16})$$

при $n \rightarrow \infty$. Підставляючи цю формулу в (Г.11) знаходимо

$$\mathcal{I}_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{t^{k-1}}{\alpha^{k-1/2}} \frac{e^{n\alpha[1+\ln(t/\alpha)]}}{n^{\alpha n+k-1/2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[-n^{1-\beta}(t/\alpha)^{\beta}]^m}{m!}. \quad (\text{Г.17})$$

Ряд в останньому виразі не є інше, як розклад у ряд Тейлора функції $e^{-n^{1-\beta}(t/\alpha)^\beta}$, а тому

$$\mathcal{I}_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{t^{k-1}}{\alpha^{k-1/2}} \frac{e^{n\alpha[1+\ln(t/\alpha)]} e^{-n^{1-\beta}(t/\alpha)^\beta}}{n^{\alpha n+k-1/2}}. \quad (\Gamma.18)$$

Таким чином, повертаючись до формул (Г.7) і (Г.8), при $n \rightarrow \infty$ отримуємо

$$\mathcal{I}_n^< \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \frac{e^{n\alpha[1+\ln(t/\alpha)]} e^{-n^{1-\beta}(t/\alpha)^\beta}}{n^{\alpha n+1/2}}, \quad (\Gamma.19)$$

для $\alpha < \beta$ та

$$\mathcal{I}_n^> \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-\beta} \frac{e^{n\beta[1+\ln(t/\beta)]} e^{-n^{1-\alpha}(t/\beta)^\alpha}}{n^{\beta n+1/2}} \quad (\Gamma.20)$$

для $\alpha > \beta$. Отже, для релаксації Міттаг-Леффлера ряди (5.31) та (5.34) будуть також дуже швидко збіжними (швидшими, ніж експоненціальна збіжність), але повільнишими за ряд для релаксації Леві (5.41).

ДОДАТОК Д

Виведення рівняння Монтролла-Вейсса для різниці часу перебування дихотомічного процесу в рівноважних станах

Оскільки $\Delta_t \in [-t, t]$, отримуємо $P(\Delta, t) = 0$ при $|\Delta| > t$, і тоді умова нормування для $P(\Delta, t)$ приймає вигляд $\int_{-t}^t d\Delta P(\Delta, t) = 1$. Нехай процес $f(t)$ має рівно n ($n = \overline{0, \infty}$) стрибків на інтервалі $(0, t]$. Введемо густину ймовірності n стрибків процесу $f(t)$

$$P^{(n)}(\Delta, t) = \langle \delta(\Delta_t - \Delta) \rangle_n, \quad (\text{Д.1})$$

де $\langle \cdot \rangle_n$ – усереднення по траєкторіям з n стрибками процесу. Тоді ми можемо представити $P(\Delta, t)$ у формі

$$P(\Delta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(\Delta, t). \quad (\text{Д.2})$$

Окрім цього, у відповідності з означенням (Д.1), ймовірність, що задана траєкторія $f(t)$ має точно n стрибків в інтервалі $(0, t]$ дається виразом

$$W^{(n)}(t) = \int_{-t}^t d\Delta P^{(n)}(\Delta, t), \quad (\text{Д.3})$$

і умова нормування для густини ймовірності $P(\Delta, t)$ записується як $\sum_{n=0}^{\infty} W^{(n)}(t) = 1$.

Нашим наступним кроком буде вираження густин $P^{(n)}(\Delta, t)$ через ймовірності $W^{(n)}(t)$ (4.12), а тому в термінах густин часів очікування $p^{\pm}(\tau)$. Для цього ми спочатку представимо різницю часів перебування в верхньому і нижньому положеннях для траєкторії з n стрибками в інтервалі $(0, t]$ як $\Delta_t^{(n)}$. Очевидно, що $\Delta_t^{(0)} = t$, і при $n \geq 1$ справедливою є рівність

$$\Delta_t^{(n)} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \tau_j + (-1)^n \tilde{\tau}_{n+1}. \quad (\text{Д.4})$$

Тепер зауважимо, що густини $P^{(n)}(\Delta, t)$ пов'язані з ймовірностями $W^{(n)}(t)$ наступним чином

$$P^{(n)}(\Delta, t) = W^{(n)}(t) \delta(\Delta_t^{(n)} - \Delta) \quad (\text{Д.5})$$

$(n = \overline{0, \infty})$. Відтак, можемо записати густину ймовірності $P(\Delta, t)$ у вигляді

$$P(\Delta, t) = W^{(0)}(t) \delta(t - \Delta) + \tilde{P}(\Delta, t). \quad (\text{Д.6})$$

В цьому рівнянні перший член в правій частині є сингулярним та відповідає події, коли за час t жодного стрибка не відбулося. А другий член – регулярний і характеризує, відповідно, події з $n \geq 1$ стрибками та дається формулою

$$\tilde{P}(\Delta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)}(\Delta, t), \quad (\text{Д.7})$$

де згідно з формулами (Д.5), (4.12) і (4.7)

$$P^{(n)}(\Delta, t) = \int_{\Omega_n(t)} \left(\prod_{j=1}^n d\tau_j p^{(-)^{j+1}}(\tau_j) \right) \int_{\tilde{\tau}_{n+1}}^{\infty} d\tau_{n+1} p^{(-)^{n+2}}(\tau_{n+1}) \delta(\Delta_t^{(n)} - \Delta). \quad (\text{Д.8})$$

При цьому область інтегрування дається співвідношенням (4.10), а змінна $\tilde{\tau}_{n+1}$ – формулою (4.8).

Як можна побачити з рівнянь (Д.6) і (Д.8), вираз $P(\Delta, t)$ залежить від густин ймовірності $p^+(\tau)$ і $p^-(\tau)$ доволі складним чином. А тому доцільно знайти зв'язок між $P(\Delta, t)$ та $p^\pm(\tau)$ у просторі Фур'є-Лапласа. Перетворення Лапласа, як ми обговорювали раніше, дається виразом (4.13), а перетворення Фур'є функції $\varphi(\Delta)$, нагадаємо, має вигляд

$$\mathcal{F}\{\varphi(\Delta)\} = \varphi_k = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta e^{ik\Delta} \varphi(\Delta), \quad (\text{Д.9})$$

де $-\infty < k < \infty$. Звідси знаходимо перетворення Фур'є-Лапласа функції

$P(\Delta, t)$, а саме $P_{ks} = \mathcal{L}\mathcal{F}\{P(\Delta, t)\}$. Із виразу (Д.6) отримуємо

$$P_{ks} = \frac{1 - p_{s-ik}^+}{s - ik} + \tilde{P}_{ks}, \quad (\text{Д.10})$$

де $\tilde{P}_{ks} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{ks}$, і згідно з рівнянням (Д.8) маємо

$$\begin{aligned} P_{ks}^{(n)} &= \int_0^{\infty} dt e^{-st} \left[\int_{\Omega_n(t)} \left(\prod_{j=1}^n d\tau_j p_j(\tau_j) \right) e^{ik\Delta_t^{(n)}} \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega_{n+1}(t)} \left(\prod_{j=1}^{n+1} d\tau_j p_j(\tau_j) \right) e^{ik\Delta_t^{(n)}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{Д.11})$$

Для підрахунку функцій $P_{ks}^{(n)}$ ми використаємо формулу $\Delta_t^{(n)} = (-1)^n t - \sum_{j=1}^n [(-1)^n + (-1)^j] \tau_j$, яка слідує із рівняння (4.8), і представимо внутрішні інтеграли за допомогою формул (4.11). Після інтегрування (з використанням властивості згортки функцій) рівняння (Д.11) дає

$$\begin{aligned} P_{ks}^{(2m-1)} &= (p_{s-ik}^+)^m (p_{s+ik}^-)^{m-1} \frac{1 - p_{s+ik}^-}{s + ik}, \\ P_{ks}^{(2m)} &= (p_{s-ik}^+ p_{s+ik}^-)^m \frac{1 - p_{s-ik}^+}{s - ik} \end{aligned} \quad (\text{Д.12})$$

($m = \overline{1, \infty}$). Далі із рівнянь (Д.12) та формулі для нескінченної геометричної прогресії перетворення Фур'є-Лапласа для $\tilde{P}(\Delta, t)$ записується у формі

$$\tilde{P}_{ks} = \frac{p_{s-ik}^+}{1 - p_{s-ik}^+ p_{s+ik}^-} \left(\frac{1 - p_{s+ik}^-}{s + ik} + \frac{1 - p_{s-ik}^+}{s - ik} p_{s+ik}^- \right). \quad (\text{Д.13})$$

ДОДАТОК Е

Знаходження густин ймовірності для узагальненого телеграфного процесу

Симетричний випадок

Якщо $\lambda_+ = \lambda_- = \lambda$, то $a = \lambda$, $b = 0$, $\eta(k) = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$ і рівняння (5.53) зводиться до вигляду

$$F_k(t) = \frac{\sinh(\sqrt{\lambda^2 - k^2} t)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}. \quad (\text{E.1})$$

Оскільки $\sinh(ix) = i \sin x$, то $F_k(t) = (k^2 - \lambda^2)^{-1/2} \sin(\sqrt{k^2 - \lambda^2} t)$ при $|k| > \lambda$ і обернене перетворення Фур'є для $F_k(t)$ дається формулою [381]

$$F(\Delta, t) = \frac{1}{2} I_0(\lambda \sqrt{t^2 - \Delta^2}) \quad (\text{E.2})$$

для $|\Delta| < t$ та $F(\Delta, t) = 0$ для $|\Delta| > t$. Точку $|\Delta| = t$ ми виключили, оскільки вона відповідає сингулярній складовій густини ймовірності. У формулі (E.2) $I_0(x)$ – модифікована функція Бесселя першого роду та нульового порядку [377]. Далі підстановка рівняння (E.2) в (5.54) та використання співвідношення $dI_0(x)/dx = I_1(x)$, де $I_1(x)$ – модифікована функція Бесселя першого роду та першого порядку, приводить до наступного виразу для регулярної частини густини $P(\Delta, t)$ при $|\Delta| < t$

$$\tilde{P}(\Delta, t) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} \left[I_0(\lambda \sqrt{t^2 - \Delta^2}) + \sqrt{\frac{t + \Delta}{t - \Delta}} I_1(\lambda \sqrt{t^2 - \Delta^2}) \right]. \quad (\text{E.3})$$

Використаємо тепер для зручності випадкову величину y_t (визначення 5.44), тобто нормовану на загальний час t різницю часів перебування процесу $f(t)$ в рівноважних положеннях. Приймаючи до уваги, що густина ймовірності цієї величини $\mathcal{P}_t(y) = \langle \delta(y_t - y) \rangle$ виражається через густину ймовірності

$P(\Delta, t)$ як $\mathcal{P}_t(y) = tP(yt, t)$, із рівнянь (Д.6) і (Е.3) одержуємо

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_t(y) &= e^{-\lambda t} \delta(y - 1) + \frac{\lambda t}{2} e^{-\lambda t} \left[I_0(\lambda \sqrt{1 - y^2} t) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} I_1(\lambda \sqrt{1 - y^2} t) \right]. \end{aligned} \quad (\text{Е.4})$$

Несиметричний випадок

Для знаходження допоміжної функції $F(\Delta, t) = \mathcal{F}^{-1}\{F_k(t)\}$ у загальному випадку довільних параметрів λ_+ і λ_- ми спочатку задамо інтеграл $I = (2\pi)^{-1} \int_C dz e^{-iz\Delta} F_z(t)$, де $z = k + ik'$ – це комплексна змінна з дійсними k та k' , а C – замкнутий контур в комплексній площині z . Нехай контур C являє собою дві паралельні прямі з $k' = 0$ та $k' = -b$, і два вертикальні сегменти з $k = -\infty$ та $k = \infty$. До того ж ми звернемо увагу, що точки розгалуження $z = \pm\nu - ib$ ($\nu = \sqrt{\lambda_+ \lambda_-}$) функції $\eta(z)$ ми обходимо і виключаємо за межі контуру. Виходячи із цих передумов, функція $e^{-iz\Delta} F_z(t)$ є аналітичною в області C , а тому згідно з інтегральною теоремою Коші маємо $I = 0$.

Так як інтеграли вздовж вертикальних сегментів C дорівнюють нулю, а функція $F(\Delta, t)$ задається як частина інтегралу I вздовж прямої з $k' = 0$, то умова $I = 0$ приводить до наступного представлення допоміжної функції

$$F(\Delta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-i(k-ib)\Delta} F_{k-ib}(t). \quad (\text{Е.5})$$

Тепер, переписуючи останній результат в формі $F(\Delta, t) = e^{-b\Delta} \mathcal{F}^{-1}\{F_{k-ib}(t)\}$ та використовуючи співвідношення

$$F_{k-ib}(t) = \frac{\sinh(\sqrt{\nu^2 - k^2} t)}{\sqrt{\nu^2 - k^2}}, \quad (\text{Е.6})$$

яке слідує із рівняння (5.53), за аналогією з формулами (Е.1) та (Е.2) знаходимо

$$F(\Delta, t) = \frac{1}{2} e^{-b\Delta} I_0(\nu \sqrt{t^2 - \Delta^2}) \quad (\text{Е.7})$$

для $|\Delta| < t$, а також $F(\Delta, t) = 0$ для $|\Delta| > t$.

Нарешті, підставляючи функцію $F(\Delta, t)$ із виразу (E.7) в (5.54), ми можемо обчислити регулярну складову густини ймовірності $P(\Delta, t)$ у випадку несиметричного телеграфного процесу

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\Delta, t) = & \frac{\lambda_+}{2} e^{-at-b\Delta} \left[I_0(\nu \sqrt{t^2 - \Delta^2}) \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}} \sqrt{\frac{t+\Delta}{t-\Delta}} I_1(\nu \sqrt{t^2 - \Delta^2}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Значить відповідна густина ймовірності масштабованої випадкової величини y_t записується як

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_t(y) = & e^{-\lambda_+ t} \delta(y-1) + \frac{\lambda_+ t}{2} e^{-at-byt} \left[I_0(\nu \sqrt{1-y^2} t) \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}} \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} I_1(\nu \sqrt{1-y^2} t) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

ДОДАТОК Е

Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати

1. Denisov S. I. Asymptotic solutions of decoupled continuous-time random walks with superheavy-tailed waiting time and heavy-tailed jump length distributions / S. I. Denisov, S. B. Yuste, **Yu. S. Bystrik**, H. Kantz, K. Lindenberg // Phys. Rev. E. – 2011. – Vol. 84, no. 6. – P. 061143 (7 pp).
2. Denisov S. I. Limiting distributions of continuous-time random walks with superheavy-tailed waiting times / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik**, H. Kantz // Phys. Rev. E. – 2013. – Vol. 87, no. 2. – P. 022117 (13 pp).
3. **Быстrik Ю. С.** Численное исследование законов сверхмедленной диффузии для определенного класса непрерывных во времени случайных блужданий / **Ю. С. Быстrik** // J. Nano-Electron. Phys. – 2016. – Vol. 8, no. 1. – P. 01044 (5 pp).
4. Denisov S. I. Continuous-time random walk model of relaxation of two-state systems / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik** // Acta Phys. Pol. B. – 2015. – Vol. 46, no. 5. – P. 931 (17 pp).
5. **Быстrik Ю. С.** Аномальные релаксационные процессы в двухуровневых системах / **Ю. С. Быстrik**, Л. А. Денисова // J. Nano-Electron. Phys. – 2015. – Vol. 7, no. 3. – P. 03049 (9 pp).

2. Наукові праці апробаційного характеру

6. Denisov S. I. Asymptotic solutions of decoupled continuous-time random walks with superheavy-tailed waiting time and heavy-tailed jump length / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik**, H. Kantz // Proceedings of The 2nd International Conference “Nanomaterials: Applications and Properties” (Alushta, 17-22 September 2012). – Sumy, 2012. – Vol. 1, no. 4. – P. 04MFPN17 (4pp).
7. Denisov S. I. Long-time behavior of the continuous-time random walk with a superheavy-tailed distribution of waiting times / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik**, H. Kantz // Proceedings of the 3rd International Conference “Quantum

- Electrodynamics and Statistical Physics" (Kharkov, August 29 – September 2, 2011). – Kharkov, 2011. – P. 135.
8. **Быстrik Ю. С.** Релаксационные процессы в дихотомических системах / **Ю. С. Быстrik**, С. И. Денисов // Збірник тез школи-семінару “Багатомасштабне моделювання фізичних процесів у конденсованих середовищах” (Суми, 21-22 жовтня 2014 р.). – Суми, 2014. – С. 23.
 9. Denisov S. I. New asymptotic solutions of the unbiased continuous-time random walks / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik** // Збірник тез науково-практичної конференції “Фізика, електроніка, електротехніка – 2011” (Суми, 18-22 квітня 2011 р.). – Суми, 2011. – С. 31.
 10. Denisov S. I. Long-time solutions of decoupled continuous-time random walks with asym-metric heavy-tailed jump length distributions / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik** // Збірник тез науково-практичної конференції “Фізика, електроніка, електротехніка – 2012” (Суми, 16-21 квітня 2012 р.). – Суми, 2012. – С. 30.
 11. **Bystrik Yu. S.** Laws of anomalous superslow diffusion / **Yu. S. Bystrik**, S. I. Denisov // Збірник тез науково-практичної конференції “Фізика, електроніка, електротехніка – 2013” (Суми, 22-27 квітня 2013 р.). – Суми, 2013. – С. 53.
 12. **Быстrik Ю. С.** Процессы релаксации в двухуровневых системах. / **Ю. С. Быстrik**, С. И. Денисов // Збірник тез науково-практичної конференції “Фізика, електроніка, електротехніка – 2015” (Суми, 20-25 квітня 2015 р.). – Суми, 2015. – С. 73.
 13. **Бистrik Ю. С.** Асимптотичні у часі густини ймовірності для надповільних польотів Леві / **Ю. С. Бистrik**, С. И. Денисов // Збірник тез науково-практичної конференції “Інформатики, математика, автоматика – 2019” (Суми, 23-26 квітня 2019 р.). – Суми, 2019. – С. 194.
 14. **Bystrik Yu. S.** Stationary Kolmogorov-Feller equation: Exact solutions / **Yu. S. Bystrik**, S. I. Denisov // Збірник тез науково-практичної конференції “Інформатики, математика, автоматика – 2019” (Суми, 23-26 квітня 2019 р.). – Суми, 2019. – С. 194.

2019 p.). – Суми, 2019. – С. 192.

3. Наукові праці, які додатково відображають наукові результати

15. Denisov S. I. Statistics of bounded processes driven by Poisson white noise / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik** // Phys. A. – 2019. – Vol. 515. – P. 38-46 (9 pp).
16. Denisov S. I. Exact stationary solutions of the Kolmogorov-Feller equation in a bounded domain / S. I. Denisov, **Yu. S. Bystrik** // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. – 2019. – Vol. 74. – P. 248-259 (12 pp).